Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 9

1. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für festes $t \in \mathbb{R}_+$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert man eine Funktion $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch
$$f_n(s) := \begin{cases} f\left(\frac{j+1}{2^n}t\right), & \text{falls } s \in \left[\frac{j}{2^n}t, \frac{j+1}{2^n}t\right) \text{ für } j = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \\ f(s), & s \geq t. \end{cases}$$
Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ für jedes $s \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie weiters, dass f_n monoton fallend ist, falls f monoton steigend ist.

2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Für $X \in \mathcal{E}_\mathrm{b}$ ist das stochastische Integral $X.B$ wohldefiniert, d.h. es ist unabhängig von der Darstellung von X.
   (b) Es gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}$ sowie $\mathcal{E}_\mathrm{b} \subseteq \mathcal{P}^2 \subseteq \mathcal{P}^2_{\mathrm{loc}}$.
   Hinweis: Um $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}$ einzusehen überlegen Sie sich, dass ein adaptierter rechtsstetiger (linksstetiger) Prozess X auch progressiv messbar ist. Betrachten Sie dazu für festes $t \geq 0$ die Folge von Zufallsvariablen
   $$Y_n(\omega, s) := \begin{cases} X_{\frac{j+1}{2^n}t}(\omega), & s \in \left[\frac{j}{2^n}t, \frac{j+1}{2^n}t\right), \text{ für } j = 0, 1, \dots, 2^{n-1}, \\ X_s(\omega), & s \geq t, \end{cases}$$
   und verwenden Sie Beispiel 1.

3. Sei $\mathcal{F}$ eine Filtration auf einer beliebigen Indexmenge $T \subseteq \mathbb{R}$, $X = (X_t)_{t\in T}$ ein reellwertiger Prozess, τ eine Stoppzeit mit Werten in T und die Abbildung X_τ definiert durch $X_\tau : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega)$. Zeigen Sie, dass X_τ messbar bezüglich $\mathcal{F}_\tau$ ist, falls eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:
   (a) T ist abzählbar und X ist adaptiert.
   (b) $T = \mathbb{R}_+$ und X ist progressiv messbar.
   Hinweis: Beachten Sie, dass für $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und $t \geq 0$ gilt
   $$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau\wedge t} \in B\} \cap \{\tau \leq t\}.$$

4. Sei $\mathcal{F}$ eine Filtration auf einer höchstens abzählbaren Indexmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ und M ein reellwertiger, integrierbarer und adaptierter Prozess auf T. Dann ist M ein Martingal genau dann, wenn $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$ für jede beschränkte T-wertige Stoppzeit τ.
Hinweis: Um die Rückrichtung zu zeigen betrachten Sie für $s < t$, $s, t \in T$, und $A \in \mathcal{F}_s$ die Abbildung $\tau := s\mathbf{1}_A + t\mathbf{1}_{A^c}$.