Übungsblatt 10

1. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und definiere die Stoppzeit $\tau := \inf\{t \geq 0 \colon B_t = -1\}$ als den ersten Zeitpunkt, bei dem B den Wert -1 erreicht.
Definiere nun den Prozess $M = (M_t)_{t\in[0,1]}$ durch
$$M_t := \begin{cases} 1 + B^{\tau}_{t/(1-t)} & \text{für } t \in [0,1), \\ 0 & \text{für } t \in [1,\infty), \end{cases}$$
bzgl. der Filtration $\mathbb{F}' := (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$, definiert durch
$$\mathcal{F}'_t := \begin{cases} \mathcal{F}_{t/(1-t)} & \text{für } t \in [0,1), \\ \mathcal{F}_\infty & \text{für } t \in [1,\infty), \end{cases}$$
wobei $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\in[0,\infty)} \mathcal{F}_t)$.
Zeige:
   (a) Die gestoppte Brownsche Bewegung B^τ ist ein stetiges Martingal bzgl. $\mathbb{F}$.
   (b) M ist ein nicht-negativer, rechtsstetiger Prozess.
   (c) M ist auf der Menge $\{\tau < \infty\}$ stetig.
   (d) M ist ein Supermartingal bzgl. $\mathbb{F}'$.

2. Fortsetzung von Beispiel 1. Zeige:
   (a) $(M_t)_{t\in[0,1)}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}'_t)_{t\in[0,1)}$.
   (b) $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist kein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}'_t)_{t\in[0,\infty)}$.
   (c) $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist ein lokales Martingal bzgl. $(\mathcal{F}'_t)_{t\in[0,\infty)}$.

   Hinweis: Für (b) betrachte $\mathbb{E}[M_1]$ und $\mathbb{E}[M_0]$.
   Für (c) verwende die lokalisierende Folge $\tau_n := \inf\{t \geq 0 \colon |M_t| \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Zur Martingaleigenschaft des gestoppten Prozesses: Verwende $M^{\tau_n}_t = M^{\tau_n}_1$ für $t \geq 0$. Wegen der f.s. Stetigkeit (bei $t = 1$) und der Beschränktheit von M^{τ_n} kann der Satz der dominierten Konvergenz angewandt werden. Außerdem beachte, dass $(M^{\tau_n}_t)_{t\in[0,1)}$ bereits ein Martingal ist.

3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $J \subseteq I$ ein Teilintervall von I. Definiere $I_{\leq t} := \{u \in I \mid u \leq t\}$ und $I_{\geq t} := \{u \in I \mid u \geq t\}$ für $t \in I$.
Bezeichne $\mathbb{V}_f$ die Totalvariation von f. Dann zeige
   (a) $\mathbb{V}_f(J) \leq \mathbb{V}_f(I)$
   (b) Für jedes $t \in I$ gilt $\mathbb{V}_f(I) = \mathbb{V}_f(I_{\leq t}) + \mathbb{V}_f(I_{\geq t})$.

4. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ die eindimensionale Brownsche Bewegung und τ eine beliebige Stoppzeit. Bestimme die quadratische Variation von B und B^τ. Außerdem bestimme den Kovariationsprozess $[B, B^\tau]$.

   Hinweis: Verwende die Eindeutigkeit der quadratischen Variation. Welche Aussagen kann man über den Prozess $(B^2_t - t)_{t\geq 0}$ treffen?

Zum Termin: 19.01.2015