Übungsblatt 11

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Zeige, dass f stetig ist und dass $\mathbb{V}_f(I) = \infty$ für jedes nicht-triviale[1] Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in \overline{I}$ gilt.

2. Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion von lokal beschränkter Totalvariation[2].
   Zeige, dass monoton nicht-fallende Funktionen f_+ und f_- existieren, sodass $f = f_+ - f_-$.

   Hinweis: Eine mögliche Wahl ist $f_+(t) = \mathbb{V}_f([0,t])$ und $f_-(t) = \mathbb{V}_f([0,t]) - f(t)$ für $t \in [0,\infty)$.

3. Sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die bei jedem Punkt von I entweder rechts- oder linksstetig ist. Zusätzlich sei $D \subseteq I$ eine dichte, abzählbare Menge und enthalte mögliche Randpunkte des Intervalls.
   Bezeichne die Menge aller Partitionen von I als

$$\mathcal{P}(I) = \{\{t_0,\dots,t_n\} \subseteq I \mid n \in \mathbb{N}, t_0 < \dots < t_n\}$$

   und die Menge aller Partitionen von I mit Punkten aus D als

$$\mathcal{P}_D(I) = \{\{t_0,\dots,t_n\} \subseteq I \mid n \in \mathbb{N}, t_0 < \dots < t_n,\ t_0,\dots,t_n \in D\}.$$

   Zeige $\mathcal{P}_D(I) \subseteq \mathcal{P}(I)$, die Abzählbarkeit von $\mathcal{P}_D(I)$ und

$$\mathbb{V}_f(I) := \sup_{\mathcal{P}(I)} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sup_{\mathcal{P}_D(I)} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

4. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger, reellwertiger stochastischer Prozess mit beschränkter Totalvariation.
   Definiere die quadratische Variation von X als punktweiser Grenzwert

$$[X]_t := \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2, \quad t \geq 0,$$

   wobei $\Pi = \{t_0,\dots,t_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $t_0 < \dots < t_n$ durch alle möglichen Partitionen von $[0,t]$ läuft und $|\Pi| = \max\{|t_i - t_{i-1}| \colon i \in \{1,\dots,n\}\}$ die Feinheit der Partition Π ist.
   Zeige, dass $[X]_t = 0$ für alle $t \geq 0$ gilt.

[1] Ein Intervall heißt nicht-trivial, wenn es mindestens 2 Elemente besitzt.
[2] Eine Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist von lokal beschränkter Variation, wenn $\mathbb{V}_f([0,t]) < \infty$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Zum Termin: 26.01.2015