# Übungsblatt 1

1. Beweise mit Hilfe der Transformation auf Polarkoordinaten, dass
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\, d\lambda_2(x,y) = 2\pi$$
gilt, wobei $\lambda_2$ das 2-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet.
Zeige damit, dass die Dichtefunktion einer Standardnormalverteilung tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

2. Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 \geq 0$. Berechne die momentenerzeugende Funktion $\mathbb{E}[e^{tX}]$, $t \in \mathbb{R}$, von X.
Verwende dieses Resultat, um auch die momentenerzeugende Funktion einer multivariaten Normalverteilung zu bestimmen. Dazu sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ mit dem Vektor $\mu \in \mathbb{R}^d$ und der positiv definiten Matrix $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Zeige
$$\mathbb{E}[e^{\langle t,X\rangle}] = \exp\left(\langle t,\mu\rangle + \frac{1}{2}\langle t, Ct\rangle\right), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$
wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.
*Hinweis: Zeige $\langle t,X\rangle \sim \mathcal{N}(\langle t,\mu\rangle, \langle t, Ct\rangle)$ und verwende das Resultat aus dem eindimensionalen Fall.*

3. Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 \geq 0$. Zeige
$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathbb{E}[X^n]}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Verwende das Resultat aus Beispiel 2 und die Darstellung(1), um die Momente der zentrierten Normalverteilung $X$ zu bestimmen. Beweise für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$ und
$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^n.$$
*Hinweis: Entwickle die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe und verwende, dass die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig bestimmt sind.*

4. Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 \geq 0$. Zeige für $p \geq 0$
$$\mathbb{E}[|X|^p] = \frac{2^{\frac{p}{2}}\sigma^p}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right),$$
wobei $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$, $s > 0$, die Gamma-Funktion bezeichnet.

**Zum Termin:** 20.10.2014