Übungsblatt 3

1. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Bezeichne mit

$$F^{\leftarrow}(x) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq x\}, \quad x \in [0,1]$$

die verallgemeinerte Inverse von F. Sei weiters U eine gleichverteilte reellwertige Zufallsvariable auf $[0,1]$. Zeige, dass $F^{\leftarrow}(U)$ die gleiche Verteilung wie X besitzt.

2. Zeige, dass auf $([0,1), \mathfrak{B}([0,1)), \lambda)$, wobei λ das Lebesguemaß auf $[0,1)$ bezeichnet, eine Folge von unabhängig identisch verteilten reellwertigen Zufallsvariablen existiert, sodass
   (a) die Wahrscheinlichkeit an den Stellen 0 und 1 gleich $\frac{1}{2}$ ist;
   (b) die Zufallsvariablen gleichverteilt auf $[0,1]$ sind;
   (c) eine beliebige Verteilungsfunktion F besitzen.

   Hinweis für (a): Jede Zahl $\omega \in [0,1)$ besitzt eine Binärdarstellung der Form $\omega = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)2^{-n}$, mit $X_n(\omega) \in \{0,1\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Betrachte $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{N}\}$.
   Hinweis für (b): Überlege dir, dass es eine doppelt indizierte Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen $\{X_{n,k} : (n,k) \in \mathbb{N}^2\}$ mit den Eigenschaften aus (a) gibt und betrachte dann die Zufallsvariablen $X_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}$.

3. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $T > 0$ ein fester Zeitpunkt und $c > 0$.
   Zeige, dass dann auch die folgenden Prozesse $(X_t^i)_{t\geq 0}$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ Brownsche Bewegungen sind,
   (a) $X_t^1 := -B_t$ für $t \geq 0$; *(Spiegelung)*
   (b) $X_t^2 := B_{s+t} - B_s$ für $t \geq 0$; *(Zeitliche Verschiebung)*
   (c) $X_t^3 := \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ für $t \geq 0$; *(Zeitliche Skalierung)*
   (d) $X_t^4 := B_t$ für $0 \leq t \leq T$ und $X_t^4 := 2B_T - B_t$ für $t > T$. *(Spiegelung bei T)*

4. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.
   Zeige, dass dann auch der Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$X_t := \begin{cases} 0, & t = 0 \\ tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \end{cases}$$

eine Brownsche Bewegung ist.

Hinweis: Für die fast sichere Stetigkeit an der Stelle $t = 0$ zeige, dass $\lim_{\substack{t \downarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}}} X_t = 0$ fast sicher gilt.

Zum Termin: 03.11.2014