Übungsblatt 4

1. Sei T eine beliebige Indexmenge mit $T^* := \sup T$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtrierung und τ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit. Definiere
$$\mathcal{F}_\tau := \{F \in \mathcal{F}_{T^*} \mid F \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in T\}.$$
Zeige:
   (a) $\mathcal{F}_\tau$ ist eine σ-Algebra.
   (b) $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$, falls die Stoppzeit $\tau \equiv t$ konstant gleich $t \in T$ ist.

2. Sei T eine beliebige Indexmenge, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtrierung.
   (a) Seien σ, τ Stoppzeiten bzgl. $\mathbb{F}$. Zeige, dass auch $\sigma \wedge \tau$ und $\sigma \vee \tau$ Stoppzeiten bzgl. $\mathbb{F}$ sind.
   (b) Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{F}$-Stoppzeiten und definiere $\tau := \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$. Zeige, dass τ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit ist.

3. Sei T eine beliebige Indexmenge, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtrierung und seien τ, σ Stoppzeiten bzgl. $\mathbb{F}$. Zeige:
   (a) Aus $\sigma \leq \tau$ folgt $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.
   (b) $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

4. Sei T eine beliebige Indexmenge, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtrierung und seien τ, σ Stoppzeiten bzgl. $\mathbb{F}$. Zeige:
   (a) τ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar
   (b) $F \cap \{\sigma = \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ für alle $F \in \mathcal{F}_\sigma$.

5. Sei $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung und definiere $\mathbb{F}^+ := (\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$. Zeige:
   (a) $\mathbb{F}^+$ ist eine rechtsstetige Filtrierung.
   (b) Jede $\mathbb{F}$-Stoppzeit ist auch eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit

Zum Termin: 10.11.2014