# Übungsblatt 5

1. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung bzgl. der Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die folgenden drei Prozesse $\mathbb{F}$-Martingale sind:
   (a) $B_t$ für $t \geq 0$;
   (b) $B_t^2 - t$ für $t \geq 0$;
   (c) $\exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t)$ für $t \geq 0$.

2. Sei $T$ eine beliebige Indexmenge und $d \in \mathbb{N}$.
   (a) Sei $(M_t)_{t\in T}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiges Martingal und $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, sodass $f(M_t)$ für alle $t \in T$ integrierbar ist. Zeige, dass dann $(f(M_t))_{t\in T}$ ein Submartingal ist.
   (b) Sei $(M_t)_{t\in T}$ ein reellwertiges Martingal und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, nicht-fallende Funktion, sodass $f(M_t)$ für alle $t \in T$ integrierbar ist. Zeige, dass dann $(f(M_t))_{t\in T}$ ebenfalls ein Submartingal ist.

   *Hinweis: Jensen-Ungleichung.*

3. (a) Sei $T$ eine beliebige Indexmenge und $(X_t)_{t\in T}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess. Zeige die folgende Gleichheit
   $$\sigma(X_t\colon t \in T) = \bigcup_{S\subseteq T,\ |S|\leq \aleph_0} \sigma(X_s\colon s \in S),$$
   wobei $|S| \leq \aleph_0$ bedeutet, dass $S$ eine höchstens abzählbare Menge ist ($\aleph_0$ bezeichnet die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen).
   (b) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit $X_0 = 0$ fast sicher. Sei $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ eine endliche Menge von Zeitpunkten mit $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n$ und definiere $s_0 := 0$. Zeige, dass
   $$\sigma(X_{s_i}\colon i \in \{1, \dots, n\}) = \sigma(X_{s_i} - X_{s_{i-1}}\colon i \in \{1, \dots, n\})$$

   *Hinweis für (a): Für die Inklusion „$\subseteq$“ beweise, dass $\bigcup_S \sigma(X_s\colon s \in S)$ eine $\sigma$-Algebra ist und finde einen geeigneten (durchschnittsstabilen) Erzeuger von $\sigma(X_t\colon t \in T)$.*

4. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess mit $X_0 = 0$ fast sicher und bezeichne $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ seine natürliche Filtrierung.
   Verwende die Resultate aus Beispiel 3 und zeige damit, dass ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ genau dann unabhängige Inkremente besitzt[1], wenn $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s^X$ für alle $0 \leq s \leq t$ ist.
   Bei dieser Gelegenheit rufe dir die Definition der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, $\sigma$-Algebren, Mengensystemen und Mengen in Erinnerung.

   *Hinweis: Für die Richtung „$\Rightarrow$“ zeige zuerst, dass $X_t - X_s$ unabhängig von $\sigma(X_u\colon u \in S)$ für endliche Mengen $S \subseteq [0, s]$ ist. Finde einen geeigneten durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{F}_s^X$ und zeige die Unabhängigkeit von $X_t - X_s$ und dem Erzeuger.*

[1] Wir sagen, ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ besitzt unabhängige Inkremente, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle Zeitpunkte $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ die Zufallsvariablen $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}$ unabhängig sind.

**Zum Termin:** 17.11.2014