Übungsblatt 6

1. Sei μ ein positives σ-endliches Maß auf den Borelmengen von $(0,\infty)$ und definiere $\Phi(x) := \mu((0,x]) \in [0,\infty]$ für alle $x \geq 0$ und $\Phi(\infty) := \mu((0,\infty))$. Sei außerdem X eine $[0,\infty]$-wertige Zufallsvariable. Beweise, dass
$$\mathbb{E}[\Phi(X)] = \int_{(0,\infty)} \mathbb{P}[X \geq x] \, \mu(dx),$$
und folgere daraus, dass für alle $p > 0$
$$\mathbb{E}[X^p] = p \int_{(0,\infty)} x^{p-1} \mathbb{P}[X \geq x] \, dx$$
gilt. Zeige, dass die Formeln auch mit $\mathbb{P}[X > x]$ anstatt von $\mathbb{P}[X \geq x]$ gelten, wenn μ oder die Verteilung von X keine Atome besitzt.

   Hinweis: Wende den Satz von Fubini auf $(\mu \otimes \mathbb{P})\Big(\{(x,\omega) \in (0,\infty) \times \Omega \,|\, X(\omega) \geq x\}\Big)$ *an.*

2. (a) Sei Φ eine Menge $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen. Zeige, dass Φ genau dann gleichmäßig integrierbar ist, wenn die Menge der reellwertigen Zufallsvariablen $\{\|X\| \colon X \in \Phi\}$ gleichmäßig integrierbar ist.

   (b) Zeige, dass jede nichtleere endliche Teilmenge Φ von $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ gleichmäßig integrierbar ist.

3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\|X_n\|] = 0$. Zeige, dass $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ gleichmäßig integrierbar ist.

4. Sei Φ eine uniform integrierbare Menge $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen. Zeige, dass $\Phi \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ und Φ beschränkt in L^1 ist, d.h. $\sup_{X\in\Phi} \mathbb{E}[\|X\|] < \infty$.

Zum Termin: 24.11.2014