Übungsblatt 7

1. Sei Φ eine gleichmäßig integrierbare Menge $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}.\mathbb{P})$. Definiere Φ' als Menge aller $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvariablen X auf $(\Omega, \mathcal{F}.\mathbb{P})$, für die ein $Y \in \Phi$ existiert, sodass $\|X\| \leq \|Y\|$ f.s. gilt.
   Zeige, dass auch Φ' gleichmäßig integrierbar ist.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ gleichmäßig integrierbare Mengen $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen.
   Zeige, dass $\bigcup_{i=1}^n \Phi_i$ und $\{\sum_{i=1}^n X_i \mid X_1 \in \Phi_1, \ldots, X_n \in \Phi_n\}$ gleichmäßig integrierbar sind.

3. Sei X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zusätzlich sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Sub-σ-Algebra.

   (a) Konvergiere $X_n \xrightarrow{L^1} X$.
   Zeige, dass auch $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ konvergiert.

   (b) Konvergiere $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$.
   Welche zusätzliche Bedingung benötigt man, damit $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ f.s. konvergiert?

   Hinweis zu (b): Informiere dich über den Satz der bedingten dominierten Konvergenz.

4. Sei X eine integrierbare $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Seien $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{F}$, die $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{H}_n$ erfüllen.
   Zeige, dass aus der Konvergenz $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ und $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}_n] \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ gegen eine Zufallsvariable Y auch die Konvergenz $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n] \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ folgt.

   Hinweis: Definiere $F_n := E[X|\mathcal{F}_n]$, $G_n := E[X|\mathcal{G}_n]$ und $H_n := E[X|\mathcal{H}_n]$ für $n \in \mathbb{N}$.
   Verwende Vitalis Konvergenzsatz aus der Vorlesung um aus der $\mathbb{P}$-Konvergenz die L^1-Konvergenz zu erhalten. Zeige $F_n - H_n \xrightarrow{L^1} 0$ und verwende $F_n - G_n = \mathbb{E}[F_n - H_n|\mathcal{G}_n]$ um $F_n - G_n \xrightarrow{L^1} 0$ zu bekommen.

Zum Termin: 01.12.2014