Übungsblatt 8

1. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger, integrierbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und definiere den stückweise konstanten Random-Walk

$$M_t := \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} Y_n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

und $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_1, \ldots, Y_{\lfloor t \rfloor})$ für alle $t \geq 0$.
Zeige, dass $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration ist und $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal.

2. **Gegenbeispiel zum Doobschen Stoppsatz.**
Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger, symmetrischer, $\{-1, 1\}$-wertiger Zufallsvariablen und definiere den stückweise konstanten Random-Walk wie in (1).
Zeige wie bei der Brownschen Bewegung, dass der Doobsche Stoppsatz (Optinal Sampling Theorem) für den Prozess $(M_t)_{t\geq 0}$ und der Stoppzeit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : M_t = a\}$ mit $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nicht gilt. Zeige dabei auch die Bedingung $\mathbb{P}[\tau_a < \infty] = 1$.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Alle folgenden Prozesse haben die Indexmenge $[0, \infty)$.
Zeige die folgenden Aussagen:
   (a) Jeder konstante $\mathcal{F}_0$-messbare Prozess[1] ist ein lokales Martingal.
   (b) Jedes rechtsstetige Martingal ist ein lokales Martingal.
   (c) Jedes beschränkte[2] lokale Martingal ist ein Martingal.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Zeige, dass für jedes lokale Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Martingal $(M_t^{\tau_n} - M_0)_{t\geq 0}$ zusätzlich gleichmäßig integrierbar ist.

   Hinweis: Sei $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige lokalisierende Folge für das lokale Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ und definiere $\tau_n := \sigma_n \wedge n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
   Zeige, dass $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine lokalisierende Folge für $(M_t)_{t\geq 0}$ ist und $(M_t^{\tau_n} - M_0)_{t\geq 0}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal ist.

[1]Ein konstanter $\mathcal{F}_0$-messbarer Prozess ist ein Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t = X$ für alle $t \geq 0$ und einer $\mathcal{F}_0$-messbaren Zufallsvariable X.
[2]Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt beschränkt, wenn $\sup_{t\in T, \omega\in\Omega} |X_t(\omega)| < \infty$ gilt.

Zum Termin: 15.12.2014