Übungsblatt 9

1. Sei M ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathbb{F}$-adaptierter, rechtsstetiger Prozess.
   Zeige, dass die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent sind:

   (a) Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_n \nearrow \infty$ für $n \to \infty$, sodass $(M_t^{\tau_n} - M_0)_{t\geq 0}$ ein Martingal für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

   (b) Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_n \nearrow \infty$ für $n \to \infty$, sodass $(M_t^{\tau_n} 1_{\{\tau_n>0\}})_{t\geq 0}$ ein Martingal für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

   Somit kann für die Definition eines lokalen Martingals sowohl (a) als auch (b) verwendet werden.

2. Seien N und X unabhängige Zufallsvariablen, wobei X eine symmetrische $\{-1, 1\}$-wertige[1] Zufallsvariable und N eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[N] = \infty$ ist. Definiere M durch

$$M_t := \frac{1}{N} + NX1_{[1,\infty)}(t), \quad t \in [0, \infty),$$

   und sei $\mathbb{F}$ die natürliche Filtration von M.

   (a) Zeige, dass M ein rechtsstetiges lokales Martingal mit $\mathbb{E}[|M_0|] < \infty$ ist, aber kein Martingal.

   (b) Zeige, dass der Prozess $M'_t := M_t - M_0$ für $t \geq 0$ mit seiner natürlichen Filtration $\mathbb{F}'$ kein lokales Martingal ist.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige:

   (a) Die Menge der lokalen Martingale bildet einen Vektorraum.

   (b) Die Menge der (vorhersehbaren) einfachen Prozesse[2] bildet einen Vektorraum.

4. Sei Φ ein vorhersehbarer einfacher Prozess und X ein $\mathbb{F}$-progressiver Prozess.
   Zeige, dass der elementare Integralprozess $(I_t(\Phi, X))_{t\geq 0}$ wohldefiniert ist, d.h. auch wenn wir von zwei verschiedenen Darstellungen von Φ ausgehen, erhalten wir denselben Integralprozess.

[1] D.h. $\mathbb{P}[X = -1] = \mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{2}$.
[2] Predictable step processes.

Zum Termin: 12.01.2015