Übungsblatt 3

Vorbemerkungen zur Binärdarstellung.
Zuerst definieren wir

$$\mathcal{D}_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{-i} \colon \ (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \right\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und bezeichnen mit $\mathcal{D} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_n$ die Menge der dyadischen Zahlen. Diese Menge ist eine dichte Teilmenge von $[0,1]$.

Jedes $\omega \in [0,1)$ besitzt eine Binärdarstellung der Form

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i 2^{-i}, \qquad \omega_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

Diese Darstellung ist für $\omega \in [0,1) \setminus \mathcal{D}$ und $\omega = 0$ eindeutig. $\omega \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ lässt sich hingegen auf zwei Arten darstellen.
Für ein $\omega \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ existiert ein minimales $n \in \mathbb{N}$, sodass $\omega \in \mathcal{D}_i$ für alle $i \geq n$. Daher können wir dieses $\omega \in \mathcal{D}_n$ als $\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{-i}$ mit $x_n = 1$ schreiben. Dieses $\omega \in \mathcal{D}_n$ besitzt dann die folgenden beiden Darstellungen

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i 2^{-i} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i 2^{-i} + 2^{-n} \qquad \text{und} \qquad \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^* 2^{-i} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i 2^{-i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i},$$

wobei bei der ersten Darstellung $\omega_i = x_i$ für $i < n$, $\omega_n = x_n = 1$ und $\omega_i = 0$ für $i > n$, bei der zweiten Darstellung hingegen $\omega_i^* = x_i$ für $i \leq n-1$, $\omega_n^* = 0$ und $\omega_i = 1$ für $i > n$ gilt. Die Gleichheit der beiden Darstellungen folgt aus der Tatsache, dass die geometrische Reihe $\sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-n}$ ergibt.
Mit der Annahme, dass die Koeffizienten $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ der Binärdarstellung von $\omega \in [0,1)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists i > n\colon \quad \omega_i = 0 \tag{$*$}$$

erfüllen, ist die Darstellung nun eindeutig und im Falle von $\omega \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ wird die erste (endliche) Darstellung gewählt.

Beispiel 2.

(a) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$, wobei λ hier das Lebesguemaß auf $[0,1)$ bezeichnet. Für $\omega \in [0,1)$ existiert eine eindeutige Binärdarstellung $\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i 2^{-i}$, sodass die Koeffizienten $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Eigenschaft $(*)$ erfüllen.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\omega \in [0,1)$ definieren wir $X_n(\omega) := \omega_n$, wobei $\omega_n \in \{0,1\}$ der n-te Koeffizient der Binärdarstellung von ω mit $(*)$ ist.
Wir zeigen nun, dass $\mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \frac{1}{2^n}$ für alle $(x_1,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^n$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei daher $n \in \mathbb{N}$ und $(x_1,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^n$ gegeben. Definiere $m := \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{n-i} \in \{0,\ldots,2^n-1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\Big\{\omega \in [0,1)\colon X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_n(\omega) = x_n\Big\} \\
&= \Big\{\omega \in [0,1)\colon \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i 2^{-i},\ (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ erfüllen } (*),\ \omega_1 = x_1, \ldots, \omega_n = x_n\Big\} \\
&= \Big\{\omega \in [0,1)\colon \lfloor 2^n \omega \rfloor = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{n-i} = m\Big\} \\
&= \Big\{\omega \in [0,1)\colon m \le 2^n\omega < m+1\Big\} \\
&= \Big[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\Big)
\end{aligned}$$

Die Bedingung $(*)$ sichert uns $\lfloor 2^n\omega \rfloor = m$, der Fall $\lfloor 2^n\omega\rfloor = m+1$ wird damit ausgeschlossen. Damit erhalten wir die gewünschte Aussage

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \lambda\Big(\Big[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\Big)\Big) = \frac{1}{2^n}.$$

Daraus können wir nun ganz leicht folgern, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt ist. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \in \{0,1\}$ folgt aufgrund der endlichen Additivität des Maßes

$$\mathbb{P}[X_n = x_n] = \sum_{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\Big|\{0,1\}^{n-1}\Big|}_{2^{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

Also sind alle X_n, $n \in \mathbb{N}$, diskret gleichverteilt auf $\{0,1\}$.
Für die Unabhängigkeit der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen wir eine endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$, mit $\max I = n$ und $|I| = k$, wobei $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \le n$ ist. Es reicht zu zeigen, dass die Mengen $(\{X_i = x_i\})_{i\in I}$ unabhängig sind. Für $(x_i)_{i\in I} \in \{0,1\}^k$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_i = x_i \quad \forall i \in I] &= \sum_{(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus I}\in\{0,1\}^{n-k}} \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\Big|\{0,1\}^{n-k}\Big|}_{2^{n-k}} = \frac{1}{2^k} = \prod_{i\in I} \mathbb{P}[X_i = x_i].
\end{aligned}$$

Somit ist jede endliche Familie $(X_i)_{i\in I}$ unabhängig, daher ist nach Definition $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig.

(b) Da $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^2$ gleichmächtig sind, existiert eine Bijektion $\Phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Definiere $Y_{n,i} := X_{\Phi(n,i)}$ für $n, i \in \mathbb{N}$. Dann ist die Familie der Zufallsvariablen $(Y_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}$ unabhängig identisch verteilt. Definiere $Y_n := \sum_{i=1}^{\infty} Y_{n,i} 2^{-i}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Für die Unabhängigkeit der Y_n, $n \in \mathbb{N}$, verwenden wir den folgenden Satz aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wenn $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen ist und $(I_n)_{n\in J}$ eine

Zerlegung von I in paarweise disjunkte, nichtleere Mengen ist, dann ist die Familie von Zufallsvariablen $(\mathcal{X}_n)_{n\in J}$ ebenfalls unabhängig, wobei $\mathcal{X}_n := (X_i)_{i\in I_n}$ für $n \in J$ definiert ist.[1]
In unserem Fall ist $J = \mathbb{N}$ und $\mathcal{X}_n = (Y_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$. Wenden wir auf die Zufallsvariablen $\mathcal{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$, die stetige Funktion $f((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=1}^\infty x_i 2^{-i}$ an, dann bleibt die Familie $(f(\mathcal{X}_n))_{n\in\mathbb{N}} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls unabhängig.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nimmt Y_n nur Werte in $[0, 1]$. Zur Berechnung der Verteilung von Y_n zeigen wir zuerst, dass Y_n keine Atome (Punktwahrscheinlichkeiten) besitzt. Für $n \in \mathbb{N}$ und $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ folgt nämlich aus der Stetigkeit von unten des Maßes und der Unabhängigkeit der $(Y_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_{n,i} = y_i \quad \forall i \in \mathbb{N}] &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n,1} = y_1, \dots, Y_{n,k} = y_k] \\ &= \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}[Y_{n,i} = y_i] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0.\end{aligned} \tag{$**$}$$

Daraus ergibt sich, dass $\mathbb{P}[Y_n = y] = 0$ für jedes $y \in [0, 1]$.
Sei nun $k \in \mathbb{N}$, $(y_1, \dots, y_k) \in \{0, 1\}^k$ und definiere $m := \sum_{i=1}^k y_i 2^{k-i} \in \{0, \dots 2^k - 1\}$. Dann erhalten wir

$$\mathbb{P}\Big[\frac{m}{2^k} \le Y_n < \frac{m+1}{2^k}\Big] = \mathbb{P}\Big[\lfloor 2^k Y_n\rfloor = m\Big] = \mathbb{P}[Y_{n,1} = y_1, \dots, Y_{n,k} = y_k] = \frac{1}{2^k},$$

wobei bei der zweiten Gleichheit $(**)$ wegen der Nicht-Eindeutigkeit der Binärdarstellung verwendet wurde.
Für eine dyadische Zahl $y \in \mathcal{D}$ existieren $k \in \mathbb{N}$ und $(y_1, \dots, y_k) \in \{0, 1\}^k$, sodass $y = \sum_{i=1}^k y_i 2^{-i}$, definiere $m := 2^k y \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[Y_n \le y] = \mathbb{P}[Y_n < y] = \mathbb{P}\Big[Y_n < \frac{m}{2^k}\Big] = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{P}\Big[\frac{i}{2^k} \le Y_n < \frac{i+1}{2^k}\Big] = m \cdot \frac{1}{2^k} = y$$

Da die dyadischen Zahlen dicht in $[0, 1]$ liegen und jede Verteilungsfunktion rechtsstetig ist, folgt $\mathbb{P}[Y_n \le y] = y$ für jedes $y \in [0, 1]$. Also sind $Y_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Aus (b) erhalten wir die Existenz einer Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit $Y_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$ für $n \in \mathbb{N}$.
Sei F eine beliebige Verteilungsfunktion und definiere $Z_n := F^{\leftarrow}(Y_n)$[2] für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_{Z_n} = F$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[1] Siehe Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Auflage, Satz 9.6
[2] $F^{\leftarrow}$ bezeichnet die verallgemeinerte Inverse von F