Übungsblatt 10

1. Sei $\tau\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine Zufallsvariable und $\lambda > 0$. Definiere $\mathcal{F}_t = \sigma(\tau \wedge t)$ und $X_t = e^{\lambda(\tau\wedge t)}$ für alle $t \geq 0$, sowie $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und $X := (X_t)_{t\geq 0}$. Zeige:

   (a) $\mathbb{F}$ ist eine Filtration.

   (b) X ist ein $\mathbb{F}$-Submartingal.

   (c) Im Falle $\tau \sim \mathrm{Exp}(\mu)$[1] mit $\mu \leq \lambda$ gilt $\mathbb{E}[X_\tau] = \infty$.

   Hinweis für (a): Betrachte die Erzeuger $\big\{\{\tau \wedge s \leq u\} \colon u \in \mathbb{R}\big\}$ *und* $\big\{\{\tau \wedge t \leq u\} \colon u \in \mathbb{R}\big\}$ *von* $\mathcal{F}_s$ *bzw.* $\mathcal{F}_t$ *für* $0 \leq s \leq t$.

2. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge unabhängiger, integrierbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und definiere den stückweise konstanten Random-Walk

$$M_t := \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor} Y_n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

   und $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_0, \ldots, Y_{\lfloor t \rfloor})$ für alle $t \geq 0$.
   Zeige, dass $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration ist und $M := (M_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal.

3. *Gegenbeispiel zum Doobschen Stoppsatz.*
   Sei $Y_0 = 0$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, symmetrischer, $\{-1, 1\}$-wertiger Zufallsvariablen, d.h. $\mathbb{P}[Y_n = 1] = \mathbb{P}[Y_n = -1] = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
   Definiere den stückweise konstanten Random-Walk M und die Filtration $\mathbb{F}$ wie in (1) und definiere $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : M_t = a\}$. Verwende (ohne zu zeigen), dass $\mathbb{P}[\tau_a < \infty] = 1$. Zeige:

   (a) M ist ein $\mathbb{F}$-Martingal.

   (b) τ_a ist eine Stoppzeit für alle $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

   (c) $M_{\tau_a} = a$ f.s.

   (d) Der Doobsche Stoppsatz kann nicht auf M mit τ_a angewendet werden.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Alle folgenden Prozesse sollen die Indexmenge $\mathbb{R}_+$ haben.
   Zeige die folgenden Aussagen:

   (a) Jeder konstante $\mathcal{F}_0$-messbare Prozess[2] ist ein lokales Martingal.

   (b) Jedes rechtsstetige Martingal ist ein lokales Martingal.

   (c) Jedes beschränkte[3] lokale Martingal ist ein Martingal.

[1] Es gibt unterschiedliche Parametrisierungen der Exponentialverteilung. In diesem Beispiel ist die „übliche“ Parametrisierung mit Dichtefunktion $f_\mu(x) = \mu e^{-\mu x} 1_{\{x\geq 0\}}$, $x \in \mathbb{R}$, gemeint.

[2] Ein konstanter $\mathcal{F}_0$-messbarer Prozess ist ein Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t = X$ für alle $t \geq 0$ und einer $\mathcal{F}_0$-messbaren Zufallsvariable X.

[3] Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt beschränkt, wenn $\sup_{t\in T, \omega\in\Omega} |X_t(\omega)| < \infty$ gilt.

Zum Termin: 11.01.2016

5. Sei M ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathbb{F}$-adaptierter, rechtsstetiger Prozess.
   Zeige, dass die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent sind:

   (a) Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_n \nearrow \infty$ für $n \to \infty$, sodass $(M_t^{\tau_n} - M_0)_{t\geq 0}$ ein Martingal für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

   (b) Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sigma_n \nearrow \infty$ für $n \to \infty$, sodass $(M_t^{\sigma_n} 1_{\{\sigma_n>0\}})_{t\geq 0}$ ein Martingal für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

   Somit kann für die Definition eines lokalen Martingals sowohl (a) als auch (b) verwendet werden.

6. Sei M ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathbb{F}$-adaptierter, rechtsstetiger Prozess.
   Zeige, dass die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent sind:

   (a) Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_n \nearrow \infty$ für $n \to \infty$, sodass $(M_t^{\tau_n} - M_0)_{t\geq 0}$ ein Martingal für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

   (b) Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sigma_n \nearrow \infty$ für $n \to \infty$, sodass $(M_t^{\sigma_n} - M_0)_{t\geq 0}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

   Somit kann für die Definition eines lokalen Martingals sowohl (a) als auch (b) verwendet werden.

Zum Termin: 11.01.2016