Übungsblatt 11

1. Sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal und M_0 integrierbar.
   Zeige, dass eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass M^{τ_n} für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Martingal ist.

2. Sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiges nicht-negatives lokales Martingal und M_0 integrierbar.
   Zeige, dass M ein Supermartingal ist.

   Hinweis: Verwende das Lemma von Fatou.

3. Sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal und definiere den Supremumsprozess $M^* = (M_t^*)_{t\geq 0}$ mit $M_t^* := \sup_{s\in[0,t]} \|M_s\|$ für $t \geq 0$ und $M_\infty^* := \sup_{s\geq 0} \|M_s\|$.
   (a) Falls M^* integrierbar ist, d.h. $\mathbb{E}[M_t^*] < \infty$ für alle $t \geq 0$, dann ist M ein Martingal.
   (b) Falls M_∞^* integrierbar ist, dann ist M sogar ein gleichmäßig integrierbares Martingal.

4. Seien N und X unabhängige Zufallsvariablen, wobei X eine symmetrische, $\{-1, 1\}$-wertige Zufallsvariable und N eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[N] = \infty$ ist. Definiere M durch

$$M_t := \frac{1}{N} + NX1_{[1,\infty)}(t), \quad t \in [0, \infty),$$

   und sei $\mathbb{F}$ die natürliche Filtration von M.
   (a) Zeige, dass M ein rechtsstetiges lokales Martingal mit $\mathbb{E}[|M_0|] < \infty$ ist, aber kein Martingal.
   (b) Zeige, dass der Prozess $M_t' := M_t - M_0$ für $t \geq 0$ mit seiner natürlichen Filtration $\mathbb{F}'$ kein lokales Martingal ist.

5. *Die algebraische Struktur der Menge der lokalen Martingale.*
   Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\mathcal{M}_{loc}$ der Raum der $\mathbb{R}^d$-wertigen lokalen Martingale.
   (a) Zeige, dass $\mathcal{M}_{loc}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.
   (b) Erweiterung der Homogenität aus (a) : Sei A eine $\mathbb{R}^{n\times d}$-wertige, $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsmatrix und M eine $\mathbb{R}^d$-wertiges lokales Martingal.
   Zeige, dass AM ein $\mathbb{R}^n$-wertiges lokales Martingal ist.

   Hinweis für (a): Zeige nur, dass $\mathcal{M}_{loc}$ abgeschlossen unter Vektoraddition und Skalarmultiplikation sind.

Zum Termin: 18.01.2015