Übungsblatt 1

1. Seien X und Y Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   (a) Zeige, dass aus der Unabhängigkeit von X und Y, die Unkorreliertheit von X und Y folgt.
   (b) Finde ein einfaches Beispiel (mit endlichem Wahrscheinlichkeitsraum), bei dem X und Y unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

2. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und X eine weitere Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   Zeige, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ genau dann, wenn
   $$\mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \varepsilon\}\Big) = 0 \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$
   wobei der Limes superior von Mengenfolgen durch $\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$ definiert ist.

   Hinweis: Verwende das Lemma von Borel-Cantelli.

3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, die in Wahrscheinlichkeit (bzw. stochastisch) gegen eine Zufallsvariable X konvergiert, d.h. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Zeige, dass eine fast sicher konvergente Teilfolge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert.

4. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}[X_n = 1] = p_n$ und $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - p_n$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $p_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Zeige:
   (a) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ genau dann, wenn $p_n \to 0$.
   (b) $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < \infty$.

5. Sei $X = (X_1, \ldots, X_d)$ ein quadratisch integrierbarer d-dimensionaler reellwertiger Zufallsvektor und $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$.
   Zeige, dass die folgende Formel gilt
   $$\begin{aligned} Var\big(\langle t, X\rangle\big) &= \sum_{i,j=1}^{d} t_i t_j Cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{d} t_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1,\ldots,d \\ i<j}} t_i t_j Cov(X_i, X_j), \end{aligned}$$
   wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.

Zum Termin: 12.10.2015