Übungsblatt 2

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei Y_i eine d_i-dimensional normalverteilte Zufallsvariable mit $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, C_i)$, wobei $d_i \in \mathbb{N}$, $\mu_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ und $C_i \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix ist. Außerdem seien $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig und alle auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum definiert.
   Zeige, dass $Y := (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ eine d-dimensional normalverteilte Zufallsvariable mit $Y \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ ist, wobei $d := \sum_{i=1}^n d_i$,
$$\mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_n \end{pmatrix}.$$
   Hinweis: Verwende, dass die Komponenten einer multivariaten Standardnormalverteilung unabhängig sind.

2. *Momentenerzeugende Funktion einer Normalverteilung.*
   (a) Sei X eine eindimensional normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ der Mittelwert und $\sigma^2 \geq 0$ die Varianz ist.
   Berechne die momentenerzeugende Funktion $\mathbb{E}[e^{tX}]$ von X für alle $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Sei X eine d-dimensional normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und positiv definit ist.
   Zeige
$$\mathbb{E}[e^{\langle t, X \rangle}] = \exp\left(\langle t, \mu \rangle + \frac{1}{2} \langle t, Ct \rangle \right), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$
   Hinweis zu (b): Zeige $\langle t, X \rangle$ ist eindimensional normalverteilt mit $\langle t, X \rangle \sim \mathcal{N}(\langle t, \mu \rangle, \langle t, Ct \rangle)$ und verwende das Resultat aus (a).

3. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, sodass die momentenerzeugende Funktion $m_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$ von X in einer Umgebung U von $t = 0$ existiert. Außerdem sei $V \subseteq U$ eine symmetrische Umgebung von 0.
   Zeige, dass alle Momente von X existieren und die folgende Formel
$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathbb{E}[X^n]}{n!}, \tag{1}$$
   für alle $t \in V$ gilt.
   Hinweis: Unter Verwendung der Abschätzung $e^{|x|} \leq e^x + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, zeige
$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{t^n X^n}{n!} \right| \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \mathbb{E}[|X|^n] < \infty, \quad t \in V.$$
   und verwende den Satz von Fubini oder den Satz über die dominierte Konvergenz.

Zum Termin: 19.10.2015

4. Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 \geq 0$.
   Zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass
   $$\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{\sigma^2}{2} \right)^n .$$
   Hinweis: Verwende das Resultat aus Beispiel 2(a) und entwickle es in eine Potenzreihe. Vergleiche diese Potenzreihe mit der Darstellung (1).

5. Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 \geq 0$.
   Zeige für $p \geq 0$
   $$\mathbb{E}[|X|^p] = \frac{2^{\frac{p}{2}} \sigma^p}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{p+1}{2} \right),$$
   wobei $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx$, $s > 0$, die Gamma-Funktion bezeichnet.

Zum Termin: 19.10.2015