Übungsblatt 4

1. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung, die bei der $\mathcal{F}_0$-messbaren $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvariable X startet.
   Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, dass der Startwert X und die Inkremente $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ unabhängig sind.

2. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die natürliche Filtration von B, d.h. $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s\}_{s\in[0,t]})$ für alle $t \geq 0$.
   Zeige, dass die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent sind:
   (a) Das Inkrement $B_t - B_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ für alle $0 \leq s < t$.
   (b) Die Inkremente $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sind unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

   Hinweis: Für gegebene Zeitpunkte $t > s \geq 0$ definiere $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F}_s \,|\, B_t - B_s$ ist unabhängig von $A\}$ und verwende das Dynkin-Lemma.

3. *Komponenten der d-dimensionalen Brownschen Bewegung.*
   Sei B eine d-dimensionale ($d \geq 2$) Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\mathbb{F}$, die bei der $\mathcal{F}_0$-messbaren $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvariable X startet. Seien die Komponenten von X unabhängig.
   Zeige, dass die d Komponenten von B unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen bzgl. der Filtration $\mathbb{F}$ sind.

4. *Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung.*
   Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale standardisierte Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definiere $\tilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ und $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{c^2 t}$ für alle $t \geq 0$.
   Zeige, dass $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale standardisierte Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ ist.

5. *Erneuerung der Brownschen Bewegung bei einer deterministischen Zeit.*
   Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und sei $s \geq 0$ ein fester Zeitpunkt. Definiere $\tilde{B}_t = B_{s+t} - B_s$ und $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{s+t}$ für alle $t \geq 0$.
   Zeige, dass $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale standardisierte Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ ist und dass $\tilde{B}$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ ist.

6. *Spiegelung der Brownschen Bewegung bei einer deterministischen Zeit.*
   Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale standardisierte Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\mathbb{F}$ und sei $s \geq 0$ ein fester Zeitpunkt. Definiere $\tilde{B}_t = B_t$ für $0 \leq t \leq s$ und $\tilde{B}_t = 2B_s - B_t$ für $t > s$.
   Zeige, dass $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale standardisierte Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\mathbb{F}$ ist.

Zum Termin: 09.11.2015