Übungsblatt 5

1. *Pfade der Brownschen Bewegung haben f.s. unendliche Länge.*
   Sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Definiere für $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $p > 0$ die nicht-negative Zufallsvariable

$$\ell_{n,p}(t) = \sum_{k=1}^{2^n} \|B_{tk/2^n} - B_{t(k-1)/2^n}\|_2^p$$

   (a) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \ell_{n,p}(t) = \infty$ f.s. für alle $p \in (0, 2)$ und $t > 0$. (Mit $p = 1$ erhält man, dass die Pfade der Brownschen Bewegung f.s. unendliche Länge haben.)

   (b) Zeige für alle $t > 0$, dass $\ell_{n,2}(t) \sim \Gamma(2^{n-1}d, 2^{n-1}/t)$ und folgere, dass $L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} l_{n,2}(t) = td$ f.s.

   Hinweis für (a): Berechne $\lim_{n\to\infty} \log \mathbb{E}[\exp(-l_{n,p}(t))]$. *Verwende zuerst die Unabhängigkeit der Inkremente von* B*, dann die Abschätzungen* $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ *für* $x \geq 0$. *Verwende das Ergebnis aus Aufgabe 2.25(e) des aktuellsten Skriptums (ohne Beweis) und die Abschätzung* $\log(1 + x) \leq x$ *für* $x \geq -1$.
   Hinweis für (b): Verwende die Resultate aus Aufgabe 2.25 des aktuellsten Skriptums (ohne Beweis) für den ersten Teil und Beispiel 5 aus der 3. Übung zur Berechnung des L^2*-Limes für den zweiten Teil.*

2. *Pfade der Brownschen Bewegung sind f.s. nirgends differenzierbar.*
   Zeige, dass fast alle Pfade einer eindimensionalen standardisierten Brownschen Bewegung B nirgends differenzierbar sind.

   Hinweis: Angenommen für ein $\omega \in \Omega$ *ist der Pfad* $t \mapsto B_t(\omega)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *an der Stelle* $s \in \mathbb{R}_+$ *differenzierbar. Für dieses Stele* s *existiert eine (Lipschitz-)Konstante* $\ell \in \mathbb{N}$ *und ein* $\delta > 0$, *sodass für alle* t *mit* $|t-s| \leq \delta$ *gilt*

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq \ell|t - s|.$$

   Wähle $k := \lceil s \rceil$ *und* $m \in \mathbb{N}$, *sodass* $\frac{4}{m} \leq \delta$. *Für jedes* $n \geq m$ *und* $i := \lceil ns \rceil$ *folgt für alle drei Inkremente*

$$|B_{(j+1)/n}(\omega) - B_{j/n}(\omega)| \leq 7l/n,$$

   wobei $j \in \{i, i+1, i+2\}$. *Somit ist dieses* ω *enthalten in der Menge*

$$N := \bigcup_{k,\ell,m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i=nk-n+1}^{nk} \bigcap_{j=i}^{i+2} \Big\{|B_{(j+1)/n}(\omega) - B_{j/n}(\omega)| \leq 7l/n\Big\}.$$

   Zeige, dass N *eine Nullmenge ist.*

3. Sei $d \in \mathbb{N}$. Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ in $\mathbb{R}_+$ das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n} = \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} t_1 I_d & t_1 I_d & \cdots & t_1 I_d \\ t_1 I_d & t_2 I_d & \cdots & t_2 I_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 I_d & t_2 I_d & \cdots & t_n I_d \end{pmatrix}\right)$$

   auf dem Raum $(\mathbb{R}^{dn}, \mathcal{B}^{dn})$.
   Zeige, dass die Familie der Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} \mid n \in \mathbb{N},\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n \text{ in } \mathbb{R}_+\}$$

   konsistent ist.

Zum Termin: 16.11.2015

4. *Eigenschaften der „Modifikationsrelation“.*
   Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(S, \mathcal{S})$ ein separabler metrischer Raum und $T \neq \emptyset$ eine Indexmenge. Bezeichne $\mathcal{P}$ den Raum der stochastischen Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(S, \mathcal{S})$ und Indexmenge T.
   Definiere die „Modifikationsrelation“ für $X, Y \in \mathcal{P}$ als

$$X \equiv Y :\Leftrightarrow X \text{ ist Modifikation von } Y.$$

   (a) Zeige, dass die „Modifikationsrelation“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}$ ist.

   (b) Sei X eine Modifikation von Y. Zeige, dass X und Y die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen haben.

Zum Termin: 16.11.2015