

Übungsblatt 6

1. Sei T eine beliebige Indexmenge mit $T^* := \sup T$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtrierung und τ eine \mathbb{F} -Stopppzeit. Definiere

$$\mathcal{F}_\tau := \{F \in \mathcal{F}_{T^*} \mid F \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in T\}.$$

Zeige:

- (a) \mathcal{F}_τ ist eine σ -Algebra.
 - (b) $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$, falls die Stopppzeit $\tau \equiv t$ konstant gleich $t \in T$ ist.
2. Sei T eine beliebige Indexmenge, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtrierung.
- (a) Seien σ, τ Stopppzeiten bzgl. \mathbb{F} . Zeige, dass auch $\sigma \wedge \tau$ und $\sigma \vee \tau$ Stopppzeiten bzgl. \mathbb{F} sind.
 - (b) Sei $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von \mathbb{F} -Stopppzeiten und nehme $\tau := \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ nur Werte in $\bar{T} := T \cup \{T^*\}$ an. Zeige, dass τ eine \mathbb{F} -Stopppzeit ist.
3. Sei T eine beliebige Indexmenge, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtrierung und seien τ, σ Stopppzeiten bzgl. \mathbb{F} . Zeige:
- (a) Aus $\sigma \leq \tau$ folgt $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.
 - (b) $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.
4. Sei T eine beliebige Indexmenge, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtrierung und seien τ, σ Stopppzeiten bzgl. \mathbb{F} . Zeige:
- (a) τ ist \mathcal{F}_τ -messbar
 - (b) $F \cap \{\sigma = \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ für alle $F \in \mathcal{F}_\sigma$.
5. Seien τ_1, \dots, τ_n Stopppzeiten. Definiere die Ordnungsstatistik $(\tau_{1:n}, \dots, \tau_{n:n})$ punktweise durch

$$\tau_{k:n} = \max_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| = n-k+1}} \min_{i \in I} \tau_i, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Zeige, dass $\tau_{k:n}$ Stopppzeiten für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ sind, dass $\tau_{1:n} \leq \dots \leq \tau_{n:n}$ gilt und dass die Mengen $\{\tau_1(\omega), \dots, \tau_n(\omega)\}$ und $\{\tau_{1:n}(\omega), \dots, \tau_{n:n}(\omega)\}$ für alle $\omega \in \Omega$ übereinstimmen.

6. Sei $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtrierung und definiere $\mathbb{F}^+ := (\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$. Zeige:
- (a) \mathbb{F}^+ ist eine rechtsstetige Filtrierung.
 - (b) Jede \mathbb{F} -Stopppzeit ist auch eine \mathbb{F}^+ -Stopppzeit