Übungsblatt 7

1. Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration und $\mathbb{F}^+ = (\mathcal{F}_{t+})$ die dazugehörige rechtsstetige Filtration.
   (a) Sei τ eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit und $\varepsilon > 0$. Zeige, dass $\tau + \varepsilon$ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit ist.
   (b) Sei σ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit und τ eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit. Zeige, dass $\sigma \wedge \tau$ messbar bzgl. $\mathcal{F}_\sigma$ ist.

2. Sei $(S, \mathcal{S})$ ein messbarer Raum, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration mit $\mathcal{F}_\infty = \sigma\big(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\big)$ und $X = (X_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}$-progressiver, S-wertiger stochastischer Prozess.
   Zeige, dass X adaptiert und $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \otimes \mathcal{F}_\infty$-messbar ist.

3. *Die algebraische Struktur der Menge der Martingale.*
   Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ und $\mathcal{M}$ der Raum der $\mathbb{R}^d$-wertigen $\mathbb{F}$-Martingale.
   (a) Zeige, $\mathcal{M}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
   (b) Erweiterung der Homogenität aus (a) : Sei A eine (komponentenweise) beschränkte, $\mathbb{R}^{n\times d}$-wertige, $\bigcap_{t\in T} \mathcal{F}_t$-messbare Zufallsmatrix und M eine $\mathbb{R}^d$-wertiges $\mathbb{F}$-Martingal. Zeige, dass AM ein $\mathbb{R}^n$-wertiges $\mathbb{F}$-Martingal ist.

4. Sei $M = (M_t)_{t\in T}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$-adaptierter, $\mathbb{R}^d$-wertiger, integrierbarer Prozess, sodass $\mathbb{E}[M_t - M_s] = 0$ und $M_t - M_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ für alle $s < t$ in T ist. Zeige:
   (a) M ist ein Martingal bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.
   (b) Jede Brownsche Bewegung bzgl. einer Filtration $\mathbb{F}$, die bei einer integrierbaren Zufallsvariable X startet, ist ein $\mathbb{F}$-Martingal.

5. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standardisierte Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige:
   (a) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal.
   (b) $(M_0 \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t))_{t\geq 0}$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal, wobei M_0 eine beschränkte, $\mathcal{F}_0$-messbare, reellwertige Zufallsvariable ist.

6. Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration.
   (a) Sei $(M_t)_{t\in T}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiges $\mathbb{F}$-Martingal und $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, sodass $f(M_t)$ für alle $t \in T$ integrierbar ist. Zeige, dass dann $(f(M_t))_{t\in T}$ ein $\mathbb{F}$-Submartingal ist.
   (b) Sei $(M_t)_{t\in T}$ ein reellwertiges $\mathbb{F}$-Submartingal und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, nicht-fallende Funktion, sodass $f(M_t)$ für alle $t \in T$ integrierbar ist. Zeige, dass dann $(f(M_t))_{t\in T}$ ebenfalls ein $\mathbb{F}$-Submartingal ist.

   Hinweis: Jensen-Ungleichung.

Zum Termin: 30.11.2015