Übungsblatt 8

1. Sei $(S, \mathcal{S})$ ein Messraum, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, $X\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to S$ ein $\mathbb{F}$-progressiver stochastischer Prozess und $\tau\colon \Omega \to [0,\infty]$ eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit.

   (a) Definiere den gestoppten Prozess $X^\tau = (X^\tau_t)_{t\geq 0}$ als $X^\tau_t = X_{\tau\wedge t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass X^τ ein $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess ist.

   (b) Zeige, dass die Zufallsvariable X_τ messbar bzgl. $\mathcal{F}_{\tau+}$ ist, wenn τ Werte in $\mathbb{R}_+$ annnimmt.

   Hinweis: (a) Stelle $\omega \mapsto X(\omega, t \wedge \tau(\omega))$ als Hintereinanderausführung von messbaren Funktionen dar und verwende Beispiel 1(b) aus der 7. Übung.
   (b) Verwende Lemma 3.27 aus dem Skriptum.

2. Sei (S, ρ) ein metrischer Raum, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, $\tau\colon \Omega \to [0,\infty]$ eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit und $X\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to S$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozess, der rechtsstetig (oder linksstetig, stetig, càdlàg) ist.
   Zeige, dass der gestoppte Prozess X^τ ebenfalls $\mathbb{F}$-adaptiert und rechtsstetig (oder linksstetig, stetig, càdlàg) ist.

   Hinweis: Verwende Lemma 3.25 aus dem Skriptum und Beispiel 1.

3. Sei $\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und Φ eine nichtleere Menge messbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Eigenschaften:

   (a) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $\omega_\varepsilon \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R})$ mit $\omega_\varepsilon \geq 0$, sodass
   $$\sup_{f\in\Phi} \int_{\|f\|>\omega_\varepsilon} \|f\| \, d\mu < \varepsilon.$$

   (b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine beschränkte Funktion $\omega_\varepsilon \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R})$ mit $\omega_\varepsilon \geq 0$, sodass
   $$\sup_{f\in\Phi} \int_{\|f\|>\omega_\varepsilon} \|f\| \, d\mu < \varepsilon.$$

4. (a) Sei Φ eine nichtleere Menge messbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsfunktionen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
   Zeige, dass Φ genau dann gleichmäßig integrierbar ist, wenn die Menge der reellwertigen Zufallsfunktionen $\{\|f\|\}_{f\in\Phi}$ gleichmäßig integrierbar ist.

   (b) Zeige, dass jede nichtleere, endliche Teilmenge Φ von $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R}^d)$ gleichmäßig integrierbar ist.

5. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R}^d)$ mit
   $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n\| \, d\mu = 0.$$
   Zeige, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar ist.

6. Sei Φ eine gleichmäßig integrierbare Menge $\mathbb{R}^d$-wertiger Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{F})$.
   Zeige, dass $\Phi \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R}^d)$ und Φ beschränkt in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R}^d)$ ist, d.h.
   $$\sup_{f\in\Phi} \int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty.$$

Zum Termin: 07.12.2015