Übungsblatt 9

1. Sei Φ eine gleichmäßig integrierbare Menge $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Definiere Φ' als Menge aller $\mathbb{R}^d$-wertigen messbaren Zufallsfunktionen X auf $(\Omega, \mathcal{F})$, für die ein $Y \in \Phi$ existiert, sodass $\|X\| \leq \|Y\|$ μ-f.s. gilt.
   Zeige, dass auch Φ' gleichmäßig integrierbar ist.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ gleichmäßig integrierbare Mengen $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
   Zeige, dass $\bigcup_{i=1}^n \Phi_i$ und $\{\sum_{i=1}^n X_i \mid X_1 \in \Phi_1, \dots, X_n \in \Phi_n\}$ gleichmäßig integrierbar sind.

3. Sei Φ eine nichtleere Menge $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und sei $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine messbare Funktion, die $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)/x = \infty$ erfüllt.
   Zeige, dass Φ gleichmäßig integrierbar ist, wenn $\sup_{X\in\Phi} \mathbb{E}[\varphi(\|X\|)] < \infty$ gilt.

4. Seien $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängige, reellwertige, quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0. Definiere $S_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} Y_k$ für alle $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$.
   Zeige die folgende Ungleichung für alle $\lambda > 0$
   $$\mathbb{P}[\max_{\ell\in\{1,\dots,n\}} |S_\ell| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_k).$$
   Hinweis: Verwende Beispiel 4 und 6 aus der 7. Übung und die Maximalungleichung.

5. Sei μ ein positives σ-endliches Maß auf den Borelmengen von $(0,\infty)$ und definiere $\Phi(x) := \mu((0,x]) \in [0,\infty]$ für alle $x \geq 0$ und $\Phi(\infty) := \mu((0,\infty))$. Sei außerdem X eine $[0,\infty]$-wertige Zufallsvariable. Beweise, dass
   $$\mathbb{E}[\Phi(X)] = \int_{(0,\infty)} \mathbb{P}[X \geq x]\,\mu(dx),$$
   und folgere daraus, dass für alle $p > 0$
   $$\mathbb{E}[X^p] = p \int_{(0,\infty)} x^{p-1}\mathbb{P}[X \geq x]\,dx$$
   gilt. Zeige, dass die Formeln auch mit $\mathbb{P}[X > x]$ anstatt von $\mathbb{P}[X \geq x]$ gelten, wenn μ oder die Verteilung von X keine Atome besitzt.
   Hinweis: Wende den Satz von Fubini auf $(\mu \otimes \mathbb{P})\Big(\{(x,\omega) \in (0,\infty) \times \Omega \mid X(\omega) \geq x\}\Big)$ *an.*

6. Sei X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zusätzlich sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Sub-σ-Algebra.
   (a) Konvergiere $X_n \xrightarrow{L^1} X$.
   Zeige, dass auch $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ konvergiert.
   (b) Konvergiere $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$.
   Welche zusätzliche Bedingung benötigt man, damit $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ f.s. konvergiert?

Zum Termin: 14.12.2015