1. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Prozess mit $P[\int_0^t X_s^2\,ds < \infty] = 1$ für alle $t \geq 0$ und definiere
$$E := \left\{ \int_0^\infty X_s^2\,ds = \infty \right\}.$$
Zeige, dass gilt
$$\limsup_{t\to\infty} \int_0^t X_s\,dW_s = -\liminf_{t\to\infty} \int_0^t X_s\,dW_s = +\infty \quad \text{f.s. auf } E.$$
Hinweis: Verwende Theorem 3.4.6 mit den abgeschwächten Bedingungen aus Problem 3.4.7 in Karatzas-Shreve und das Gesetz des iterierten Logarithmus für die Brownsche Bewegung.

2. Sei (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\{\mathcal{F}_t\}$ eine schwache Lösung der SDE
$$dX_t = \sigma(X_t)\,dW_t$$
bis zu einer Explosionszeit S. Zeige, dass $S = \infty$ f.s.
Hinweis: Definiere die Menge $E_t := \{\int_0^{t\wedge S} \sigma(X_s)^2\,ds = \infty\}$ für $t \geq 0$, verwende $P(E_t) = 0$, ohne es zu beweisen, und gehe wie in Beispiel 1 vor.

3. Betrachte die Girsanov-SDE
$$dX_t = |X_t|^\alpha\,dW_t$$
mit $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Zeige, dass für die SDE eine nicht-explodierende schwache Lösung existiert, aber (schwache) Eindeutigkeit in Verteilung nicht gilt.

4. Sei $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, $Z(\sigma) := \{x \in \mathbb{R}\colon \sigma(x) = 0\}$ und
$$I(\sigma) := \left\{ x \in \mathbb{R}\colon \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{dy}{\sigma(x+y)^2} = \infty \quad \forall\, \epsilon > 0 \right\}.$$
   (a) Zeige, dass für stetige σ immer $I(\sigma) \subseteq Z(\sigma)$ gilt.
   (b) Finde eine Funktion σ, sodass $Z(\sigma) \subsetneq I(\sigma)$ gilt.

Zum Termin: 28.05.2014