1. **Dynkin Formel:**
   Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^x)$, (X, W), $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ eine schwache Lösung von
   $$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$
   wobei wir annehmen, dass σ auf kompakten Mengen beschränkt ist. Sei weiters τ eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$ und sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Zeige
   $$\mathbb{E}^x\big[f(X_\tau)\big] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathcal{A}f(X_s)\, ds\right],$$
   wobei $\mathcal{A}$ der zu (1) gehörige Operator ist.

2. Sei $\mathcal{A}$ wieder der zu (1) gehörige Operator. Finde im Falle $d = 1$ alle Lösungen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von
   $$\mathcal{A}p(x) = 0.$$
   Schreibe die Lösung im Falle $b(x) \equiv b$ und $\sigma(x) \equiv \sigma$ explizit auf.

3. Verwende für $d = 1$ die Notationen und Resultate aus Beispiel 1 und 2 um das Folgende zu zeigen:
   Sei $I := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $x \in I$ und
   $$\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin I\}.$$
   Unter der Annahme, dass $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$ gilt, bestimme $\mathbb{P}^x(X_\tau = a)$ und $\mathbb{P}^x(X_\tau = b)$. Betrachte insbesondere den Fall, bei dem X eine Brownsche Bewegung ist.

4. Betrachte eine d-dimensionale Brownsche Bewegung W mit $W_0 = a \in \mathbb{R}^d$. Weiters sei $K_R \subseteq \mathbb{R}^d$ die offene Kugel mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^d$ und Radius R und $\tau_R := \inf\{t \geq 0 : W_t \notin K_R\}$.
   Verwende die Dynkin Formel um $\mathbb{E}^a[\tau_R]$ zu bestimmen.

Zum Termin: 11.06.2014