1. Betrachte eine $\mathbb{R}$-wertige, integrierbare Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

   (a) Zeige, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt
   $$\mathbb{P}(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\big[|X| 1_A\big] < \epsilon.$$

   (b) Zeige, dass die Menge
   $$\big\{\mathbb{E}[X\,|\mathcal{G}] : \mathcal{G} \text{ ist eine Sub-}\sigma\text{-Algebra von } \mathcal{F}\big\}$$
   uniform integrierbar ist.

2. Sei $\Omega = \{-1, 1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlickkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $p := \mathbb{P}(\{1\}) \in (0, \frac{1}{2})$. Definiere weiters eine rechtsstetige Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ durch $\mathcal{F}_t = \{\Omega, \emptyset\}$ für $t \in [0, 1)$ und $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ für $t \geq 1$, und einen Prozess X durch
   $$X_t(\omega) = \omega 1_{[1,\infty)}(t), \quad t \geq 0 \text{ und } \omega \in \Omega.$$
   Zeige:

   (a) X ist ein càdlàg Supermartingal und gehört zur Klasse D. Skizziere die Pfade von X.

   (b) Für alle $c \in \big[\frac{p}{1-p}, 1\big]$ gibt es eine Zerlegung $X = M - A$, wobei M ein càdlàg Martingal ist, mit
   $$M_t(\omega) = c\frac{1 + \omega - 2p}{2p} 1_{[1,\infty)}(t), \quad t \geq 0 \text{ und } \omega \in \Omega,$$
   und A ein zugehöriger wachsender càdlàg Prozess ist.

3. Sei $\Omega = (0, 1)$ das offene Einheitsintervall, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(0, 1)$ und $\mathbb{P}$ das Lebesgue-Maß auf Ω. Für $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega$ definiere
   $$X_t(\omega) = \frac{1}{1-t} 1_{[0,\omega)}(t),$$
   und
   $$\mathcal{F}_t = \begin{cases} \{F \in \mathcal{F} | F \subseteq (0, t] \text{ oder } F^c \subseteq (0, t]\} & t \in [0, 1), \\ \mathcal{F} & t \geq 1. \end{cases}$$
   Zeige:

   (a) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist eine rechtsstetige Filtrierung.

   (b) $(X_t)_{t\geq 0}$ is ein nicht-negativer Prozess mit rechtsstetigen Pfaden und ist adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Skizziere auch die Pfade von X.

   (c) $(X_t)_{t\in[0,1)}$ ist ein Martingal und $(X_t)_{t\geq 0}$ ist ein Supermartingal.

4. Fortsetzung von Beispiel 3.
   Für das Submartingal $Y_t := -X_t$, $t \geq 0$, zeige

   (a) $(Y_t)_{t\in[0,1)}$ ist nicht gleichmäßig integrierbar und $(Y_t)_{t\geq 0}$ gehört nicht zur Klasse DL.

   (b) $(Y_t)_{t\geq 0}$ hat keine Doob-Meyer-Zerlegung.

Zum Termin: 18.06.2014