1. Sei B eine eindimensionale Brownsche Bewegung und definiere für $k \in \mathbb{N}$

$$\beta_k(t) = \mathbb{E}[B_t^k], \quad t \geq 0,$$

Verwende die Itô-Formel und zeige

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t \beta_{k-2}(s)\,ds, \quad k \geq 2.$$

Bestimme daraus alle Momente von B_t, d.h $\mathbb{E}[B_t^k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

2. Verwende die Itô-Formel und zeige:

   (a) Für zwei stetige Semimartingale X und Y gilt f.s.

$$XY = X_0Y_0 + \int_0^\cdot X_s\,dY_s + \int_0^\cdot Y_s\,dX_s + [X,Y]. \tag{1}$$

   (b) Sei B eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $a, b > 0$. Dann erfüllt der zweidimensionale stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0} = (X_t^1, X_t^2)_{t\geq 0}$, definiert durch

$$X_t^1 = a\cos B_t, \quad X_t^2 = b\sin B_t, \quad t \geq 0,$$

   die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + MX_t dB_t.$$

   mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und B eine zweidimensionale Brownsche Bewegung bzgl. P. Definiere

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T].$$

Finde ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathcal{F}_T$, sodass $P \sim Q$ und sodass

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\widetilde{B}_t^1 \\ d\widetilde{B}_t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T],$$

wobei

$$\begin{pmatrix} d\widetilde{B}_t^1 \\ d\widetilde{B}_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T].$$

eine Brownsche Bewegung bzgl. Q ist.

4. Betrachte einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$. Sei $Q \sim P$ ein äquivalentes Maß und der zugehörige Dichteprozess sei Z, d.h.

$$Z_t = \frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_t}, \quad t \in [0,T].$$

Weiters sei $X \in L^1(Q)$.

   (a) Zeige

$$\mathbb{E}_Q[X_t \,|\mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}_P[XZ_T \,|\mathcal{F}_t]}{Z_t}, \quad t \in [0,T].$$

   (b) Zeige, dass ein adaptierter Prozess M genau dann ein Q-Martingal ist, wenn MZ ein P-Martingal ist.

Zum Termin: 12.03.2014