1. Seien $X = (X_t)_{t \geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ zwei stochastische Prozesse mit Werten in einem polnischen Raum $(S, \mathcal{T})$.

   (a) Angenommen X und Y haben stetige Pfade. Zeige, dass dann X genau dann eine Modifikation von Y ist, wenn X ununterscheidbar von Y ist.

   (b) Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass die Stetigkeit der Pfade wesentlich ist. D.h. finde zwei stochastische Prozesse X und Y mit Werten in einem polnischen Raum, sodass X eine Modifikation von Y ist, aber X und Y nicht ununterscheidbar sind.

2. Seien $g, \alpha\colon\ [0, T] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen, sei $\beta \geq 0$ und g erfülle

$$g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)\, ds, \quad t \in [0, T].$$

   (a) Zeige für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$g(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s) \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{k+1} \frac{(t-s)^k}{k!}\, ds + R_n(t), \quad t \in [0, T],$$

   wobei $R_n(t) = \int_0^t g(s) \beta^{n+1} \frac{(t-s)^n}{n!}\, ds$.

   (b) Folgere daraus

$$g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)}\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

3. Es gelten alle Voraussetzungen aus dem vorigen Beispiel

   (a) Angenommen es gelte zusätzlich $0 \leq g(t)$ und $\alpha \equiv 0$. Was kann man in diesem Fall über g sagen?

   (b) Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass die Integrierbarkeit von g wesentlich für die Ungleichung (1) ist. D.h. finde eine nicht-integrierbare Funktion g die alle (anderen) Voraussetzungen aus Beispiel 2 erfüllt, aber (1) nicht gilt.

4. Für gegebenes $a, b \in \mathbb{R}$ betrachte folgende stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \frac{b - X_t}{1 - t} dt + dW_t, \quad t \in [0, 1),\ X_0 = a. \tag{2}$$

   (a) Zeige, dass

$$X_t = a(1-t) + bt + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s, \quad t \in [0, 1),$$

   die eindeutige Lösung von (2) ist.

   (b) Bestimme den fast sicheren Grenzwert $\lim_{t \to 1} X_t$.

Zum Termin: 19.03.2014