1. Beweise Ungleichung (9.2) auf Seite 388 von Karatzas-Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus:
$$\mathbb{E}\Big[\big\|X_t^{(k+1)}\big\|^2\Big] \le 9\mathbb{E}\big[\|\xi\|^2\big] + 9(T+1)K^2 \int_0^t \Big(1 + E\Big[\big\|X_s^{(k)}\big\|^2\Big]\Big)\, ds, \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$
Dabei ist $X^{(0)} = \xi$ und für $k \in \mathbb{N}_0$ ist
$$X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t b\big(s, X_s^{(k)}\big)\, ds + \int_0^t \sigma\big(s, X_s^{(k)}\big)\, dW_s.$$
Dabei ist $K > 0$ die Konstante aus der linearen Wachstums- und Lipschitzbedingung:
$$\big\|b(t,x) - b(t,y)\big\| + \big\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\big\| \le K\big\|x - y\big\|,$$
$$\big\|b(t,x)\big\|^2 + \big\|\sigma(t,x)\big\|^2 \le K^2\big(1 + \|x\|^2\big), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \ge 0.$$

2. Betrachte folgende eindimensionale stochastische Differentialgleichung (SDE):
$$dX_t = f(t, X_t)dt + c(t)X_t dW_t, \quad X_0 = x, \tag{2}$$
wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige (deterministische) Funktionen sind. Weiters definiere einen *integrierenden Faktor* F durch
$$F_t = \exp\Big(-\int_0^t c(s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t c(s)^2\, ds\Big), \quad t \ge 0,$$
und sdefiniere $Y_t := F_t X_t$.
   (a) Zeige
   $$dY_t = F_t f(t, X_t)dt.$$
   (b) Fixiere $\omega \in \Omega$. Zeige, dass die Funktion $t \mapsto Y_t(\omega)$ folgende gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) erfüllt.
   $$\frac{dY_t(\omega)}{dt} = F_t(\omega) \cdot f\big(t, F_t^{-1}(\omega)Y_t(\omega)\big), \quad Y_0(\omega) = x. \tag{3}$$
   Hier wird $\omega \in \Omega$ als Parameter interpretiert. Erkläre wie man aus einer Lösung von (3) zu einer Lösung von (2) kommt.

3. Verwende die Methode aus Beispiel 2 und löse die folgenden SDEs. Überprüfe vorher, ob die Voraussetzungen aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz erfüllt sind.
   (a)
   $$dX_t = \frac{1}{X_t}dt + \alpha X_t dW_t, \quad X_0 = x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$
   (b)
   $$dX_t = \sqrt{X_t}dt + \alpha X_t dW_t, \quad X_0 = x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

4. Begründe, warum die folgende SDE eine eindeutige starke Lösung hat:
$$dX_t = \big(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\big)dt + \sqrt{1 + X_t^2}dW_t, \quad X_0 = 0.$$
Bestimme diese Lösung.
Hinweis: Mache den Ansatz $X_t = f(t, W_t)$ und verwende die Itô-Formel, um ODEs für f zu erhalten.

Zum Termin: 26.03.2014