1. Betrachte die SDE
$$dX_t = r_t X_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x.$$
   (a) Überprüfe die Voraussetzungen aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz und bestimme eine starke Lösung.

   (b) Angenommen $r_t = r$ für alle $t > 0$. Bestimme $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

   Hinweis für (a): Betrachte den Prozess $Y_t = e^{-R_t} X_t$, wobei R_t durch $dR_t = r_t dt$, $R_0 = 0$ gegeben ist.

2. Begründe die Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen der folgenden SDEs und bestimme diese.

   (a)
$$\begin{pmatrix} dX_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{X_t^{(1)}} \end{pmatrix} dW_t, \quad \begin{pmatrix} X_0^{(1)} \\ X_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} dX_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} X_t^{(2)} \\ X_t^{(1)} \end{pmatrix} dW_t, \quad \begin{pmatrix} X_0^{(1)} \\ X_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Sei $W = (W^1, \ldots, W^d)$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Betrachte die eindeutige starke Lösung $X = (X^1, \ldots, X^d)$ der SDEs
$$dX_t^i = bX_t^i d_t + \sigma dW_t^i, \quad X_0^i = x_i, \quad i = 1, \ldots, d.$$
   Definiere einen Prozess Y durch
$$Y_t := \sum_{i=1}^{d} \left(X_t^i\right)^2 \tag{1}$$
   und sei der Anfangsvektor $(x_1, \ldots, x_d) \neq (0, \ldots, 0)$.
   Zeige, dass der Prozess B, definiert durch
$$dB_t = \sum_{i=1}^{d} \frac{X_t^i}{\sqrt{Y_t}} dW_t^i, \tag{2}$$
   eine Brownsche Bewegung ist.

4. Ziel dieses Beispiels ist es eine Lösung der eindimensionalen SDE
$$dY_t = \Big(\frac{d\rho^2}{4} + \beta Y_t\Big) dt + \rho\sqrt{Y_t} dB_t, \quad Y_0 = y \geq 0,$$
   herzuleiten, wobei wir $d \in \mathbb{N}$ voraussetzen.

   (a) Zeige, dass die Voraussetzungen aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz nicht erfüllt sind.

   (b) Zeige, dass die Voraussetzungen des Satzes von Yamada-Watanabe (siehe Karatzas-Shreve, S. 291) erfüllt sind.

   (c) Sei B definiert wie in (2), mit geeigneten Werten für b und σ. Zeige, dass dann (1) die SDE löst.

Zum Termin: 02.04.2014