1. Betrachte die SDE
$$dX_t = AX_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^n,$$
wobei W eine m-dimensionale Brownsche Bewegung, $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind.

   (a) Verwende die Matrixexponentialfunktion um eine starke Lösung zu konstruieren.

   (b) Betrachte den Fall $m = n = 2$, und
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$
Wie schaut die Lösung in diesem Spezialfall aus?
Hinweis: $A \cdot A = -I$.

2. Betrachte die eindimensionale SDE
$$dX_t = \big(b - aX_t\big)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}$$
wobei $a > 0, b \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

   (a) Finde die eindeutige stake Lösung X dieser SDE.
Anleitung: Finde eine geeignete Substitution und verwende dann Beispiel 1. Zur Kontrolle ist hier die Lösung gegeben:
$$X_t = xe^{-at} + \frac{b}{a}\big(1 - e^{-at}\big) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\, dW_s.$$

   (b) Bestimme $\mathbb{E}[X_t]$ und $Cov(X_t, X_s)$.

3. Fortsetzung von Beispiel 2.

   (a) Finde die Verteilung ν_t von X_t für alle $t \geq 0$. Wie schaut die Grenzverteilung $\nu := \lim_{t\to\infty} \nu_t$ von X_t aus.

   (b) Zeige, dass ν eine invariante Verteilung von X ist. D.h. falls X_0 die Verteilung ν hat und unabhängig von W ist, dass dann X_t für jedes $t \geq 0$ Verteilung ν hat.

4. Fortsetzung von Beispiel 2.
Betrachte den Prozess
$$Y_t = \int_0^t X_s\, ds, \quad t \geq 0.$$
Bestimme $\mathbb{E}[Y_t]$ und $Cov(Y_t, Y_s)$.
Anleitung: Verwende an geeigneter Stelle folgendes Resultat, ohne dieses zu beweisen. Es handelt sich um eine stochastische Version des Satzes von Fubini.

Theorem (Satz von Fubini für Itô-Integrale).
Sei $\phi = \phi(\omega, t, s)$, $s, t \in [0, T]$ ein stochastischer Prozess, der $\mathcal{P}_T \otimes \mathcal{B}[0, T]$ messbar ist und
$$\sup_{t,s\in[0,T]} \big|\phi(t, s)\big| < \infty \ \ f.s.$$
erfüllt. Dabei bezeichnet $\mathcal{P}_T$ die progressive σ-Algebra eingeschränkt auf $\Omega \times [0, T]$. Dann gilt
$$\int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t, s)\, dW_t\Big)\, ds = \int_0^T \Big(\int_0^T \phi(t, s)\, ds\Big)\, dW_t \ \ f.s.$$

Zum Termin: 09.04.2014