1. Sei $\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Borel-messbare Funktionen, sodass alle Eigenwerte $\lambda_i(t,x)$ von $\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T$ uniform von Null wegbeschränkt sind, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass

$$\lambda_i(t,x) \geq \epsilon \quad \text{für alle } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ i \in \{1,\dots,d\}.$$

Weiters sei $b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion, die in jeder Komponente uniform beschränkt ist.

   (a) Zeige, dass $\sigma(t,x)$ für jedes $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ invertierbar ist.

   (b) Zeige, dass $u(t,x) := -\sigma(t,x)^{-1} b(t,x)$ die Novikov-Bedingung erfüllt, d.h.

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T u(s,X_s)^T u(s,X_s)\, ds\Big)\Big] < \infty, \quad T \in (0,\infty).$$

2. *Fortsetzung von Beispiel 1:*
Fixiere $T > 0$. Unter der Annahme, dass die SDE

$$dX_t = \sigma(t,X_t)dW_t, \quad t \in [0,T],$$

eine schwache Lösung mit Anfangsverteilung μ besitzt, zeige, dass auch die SDE

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \quad t \in [0,T],$$

eine schwache Lösung mit Anfangsverteilung μ besitzt.

3. Sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und erfülle

$$|b(x)| \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Betrachte die SDE

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Zeige, dass Lösungen dieser SDE eindeutig in Verteilung sind.

   (b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (X,W), \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ eine schwache Lösung dieser SDE.
   Zeige für alle $K \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$:

$$\mathbb{P}(X_t \geq K) > 0. \tag{1}$$

   (c) Sei $b(x) = r < 0$. Zeige $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ f.s. Ist das ein Widerspruch zu (1)?

Hinweis: Für (b) verwende den Satz von Girsanov. Für (c) betrachte den Prozess $(\frac{X_t}{t})_{t>0}$.

4. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ zwei Matrizen. Zeige folgende Äquivalenz:

   (i) $AA^T = BB^T$

   (ii) Es existiert eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $CC^T = I$, sodass $AC = B$.

Hinweis: Diagonalisiere AA^T, d.h. $AA^T = Q^T DQ$, wobei D eine Diagonalmatrix ist und Q orthogonal. Konstruiere dann Matrizen X und Y, sodass $QAX = QBY$ gilt.

Zum Termin: 30.04.2014