1. Seien $b_i, \sigma_{i,j} : [0,\infty) \times C[0,\infty)^d \to \mathbb{R}$ progressiv messbare Funktionale, $i \in \{1,\dots,d\}, j \in \{1,\dots,r\}$. Angenommen die SDE

$$dX_t = b(t, X_\cdot)dt + \sigma(t, X_\cdot)dW_t, \quad X_0 = x,$$

hat eine schwache Lösung $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),\ (X, W),\ \{\mathcal{F}_t\}$.

(i) Zeige, dass für $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ der Prozess

$$M_t^f := f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \Big(\frac{\partial f}{\partial s} + \mathcal{A}'_s f\Big)(s, X_\cdot)\, ds, t \geq 0, \tag{1}$$

ein stetiges lokales Martingal ist. Dabei ist für $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{A}'_t f(t,y) := \sum_{i=1}^d b_i(t,y) \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(t, f(y(t))\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{i,k}(t,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\big(t, f(y(t))\big) \quad \text{und}$$

$$a_{i,k}(t,y) := \sum_{j=1}^r \sigma_{i,j}(t,y)\sigma_{k,j}(t,y), \quad t \geq 0,\ y \in C[0,\infty)^d.$$

(ii) Für $f, g \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ bestimme den Kovariationsprozess von M^f und M^g.

(iii) Zeige, wenn die ersten partiellen Ableitungen von f beschränkt sind und zusätzlich

$$\|\sigma(t,y)\| \leq K_T, \quad t \in [0,T], y \in C[0,\infty)^d$$

gilt, wobei K_T nur eine von T abhängige Konstante ist, dass M^f ein stetiges L^2-Martingal ist.

2. Zeige, dass ein stetiger, adaptierter, $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess X mit $X_0 = 0$, genau dann eine Brown'sche Bewegung ist, wenn der Prozess M^f, definiert durch

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X_s)\, ds, \quad t \geq 0,$$

für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ein stetiges lokales Martingal ist.

3. Seien $b_i, a_{i,k} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen, die beschränkt auf kompakten Mengen sind, $i, k \in \{1,\dots,d\}$. Weiters sei X ein Prozess mit stetigen Pfaden. Definiere den Operator $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d a_{i,k}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^d).$$

Fixiere nun ein $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und $k \in \mathbb{R}$ und betrachte die Prozesse

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s)\, ds, \quad t \geq 0,$$

$$\Lambda_t = e^{-kt}f(X_t) - f(X_0) + \int_0^t e^{-ks}\Big(kf(X_s) - \mathcal{A}f(X_s)\Big)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Zeige, dass M ein lokales Martingal ist, genau dann, wenn Λ ein lokales Martingal ist.
Hinweis: Für einen stetigen Prozess C mit beschränkter Totalvariation und ein stetiges lokales Martingal M gilt

$$d(C_tM_t) - M_tdC_t = C_tdM_t.$$

Zum Termin: 07.05.2014

4. Fortsetzung von Beispiel 3.
   Nimm zusätzlich an, dass f auf kompakten Mengen von Null wegbeschränkt ist und definiere
   $$N_t = f(X_t) \exp\left(-\int_0^t \frac{\mathcal{A}f(X_s)}{f(X_s)}\, ds\right) - f(X_0), \quad t \geq 0.$$
   Zeige, dass M (bzw. Λ) ein lokales Martingal ist, genau dann, wenn N ein lokales Martingal ist.

Zum Termin: 07.05.2014