1. Löse Beispiel 3 von Übungsblatt 7.
   Hinweis: Für einen stetigen Prozess C mit beschränkter Totalvariation und ein stetiges lokales Martingal M gilt
   $$d(C_tM_t) - M_t dC_t = C_t dM_t. \tag{1}$$
   Für eine Richtung wähle $C_t = e^{-kt}$ und M_t wie in der Angabe. Berechne die linke Seite von (1) und begründe, dass dieser Ausdruck ein lokales Martingal ist.

2. Löse Beispiel 4 von Übungsblatt 7.
   Hinweis: Verwende wieder (1) mit
   $$C_t = \exp\Big(-\int_0^t \frac{\mathcal{A}f(X_s)}{f(X_s)}\,ds\Big).$$

3. (a) Wiederhole die Definition des Martingal Problems und des lokalen Martingal Problems.
   (b) Zeige, dass jede Lösung des Martingal Problems für $\mathcal{A}'_t$ mit Initial-Verteilung μ auch eine Lösung des lokalen Martingal Problems für $\mathcal{A}'_t$ mit Initial-Verteilung μ ist. Zeige weiters, dass unter der Bedingung
   $$\|\sigma(t,y)\| \le K_T, \quad t \in [0,T], y \in C[0,\infty)^d$$
   auch die Umkehrung gilt.
   Hinweis: Siehe Proposition 5.4.11 aus Karatzas-Shreve.

Definition:
Seien $b_i, \sigma_{i,j} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen, die beschränkt auf kompakten Mengen sind, $i \in \{1,\dots,d\}, j \in \{1,\dots,r\}$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf dem Messraum $(C[0,\infty)^d, \mathcal{B}(C[0,\infty)^d))$ heißt Lösung des zeithomogenen Martingal Problems wenn
$$f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t \mathcal{A}f(y(s))\,ds, \quad t \ge 0,$$
ein $\mathbb{P}$-Martingal für jedes $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ ist. Hier bezeichnet y den Koordinaten-Prozess: $y(t,\omega) := \omega(t)$. Und der Operator $\mathcal{A}$ ist definiert durch
$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d a_{i,k}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d.$$

4. Es gelten die Voraussetzungen aus der obigen Definition. Nimm an, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ eine Lösung des zeithomogenen Martingal Problems $\mathbb{P}^x$ existiert, sodass $\mathbb{P}^x(y(0) = x) = 1$ gilt. Zeige, dass wenn für $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$, $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$,
   $$\mathcal{A}f(x) + \lambda f(x) \le c, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
   für ein gewisses $\lambda > 0$ und $c \ge 0$ erfüllt ist, dann
   $$\mathbb{E}_x[f(y(t))] \le f(x)e^{-\lambda t} + \frac{c}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}), \quad t \in [0,\infty), x \in \mathbb{R}^d,$$
   gilt.
   Hinweis: Verwende die Gronwallsche Ungleichung (Übungsblatt 2, Beispiel 2b).

Zum Termin: 14.05.2014