1. Nimm an, dass für jedes $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ das Cauchy-Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u, \quad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d,$$
$$u(0,x) = f(x), \quad \text{auf } \mathbb{R}^d,$$

eine Lösung $u_f \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^d) \cap C^{1,2}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ hat, die auf allen Mengen der Form $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ beschränkt ist. Weiters seien $\mathbb{P}^x$ und $\widetilde{\mathbb{P}}^x$ zwei Lösungen des zeithomogenen Martingalproblems mit $X_0 = x$. Zeige, dass für jedes $t \in [0,\infty)$

$$\mathbb{P}^x(X_t \in \Gamma) = \widetilde{\mathbb{P}}^x(X_t \in \Gamma).$$

gilt. *Hinweis:* Verwende Proposition 5.4.2 aus Karatzas-Shreve und dann das folgende Resultat, ohne es zu beweisen:
Gilt für zwei endliche Maße μ_1, μ_2 auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_2(x), \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

so folgt $\mu_1 = \mu_2$.

2. Für festes $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ betrachte folgende PDE (Wärmeleitungsgleichung)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = f(x), \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

   (a) Bestimme eine Lösung dieser PDE und überprüfe die Vorraussetzungen aus Beispiel 1.

   (b) Wie schaut die (schwache, starke) Lösung der entprechenden SDE aus, also jene SDE, deren Operator $\mathcal{A}$ gegeben ist durch $\mathcal{A}u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$? Gilt Eindeutigkeit?

   Hinweis: Sei $g(.,x,t)$ die Dichte einer eindimensonalen Normalverteilung mit Erwartungswert x und Varianz t. Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial t}(y,x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(y,x,t).$$

3. Sei $\{A_t\}_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit stetigen und monoton wachsenden Pfaden, sodass $A(0) = 0$ gilt. Setze $S := A(\infty)$ und definiere den stochastischen Prozess T durch

$$T_s = \begin{cases} \inf\{t \geq 0; A_t > s\}; & 0 \leq s < S, \\ \infty; & s \geq S. \end{cases}$$

   Zeige:

   (a) T hat monoton wachsende rechtsstetige Pfade auf $[0,S)$.

   (b) $A(T(s)) = s \wedge S$ und $T(A(t)) = \sup\{u \geq t; A(u) = A(t)\}$ für alle $s,t \in [0,\infty)$.

   (c) $s < A(t) \Leftrightarrow T(s) < t$ und $T(s) \leq t \Rightarrow s \leq A(t)$ für $s,t \in [0,\infty)$.

4. Fortsetzung von Beispiel 3. Zeige:

   (a) Ist A adaptiert an eine rechtsstetige Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, so ist für jedes $s \geq 0$, T_s eine Stoppzeit bezüglich dieser Filtrierung. Ist die Rechtsstetigkeit der Filtrierung notwendig?

Zum Termin: 21.05.2014

(b) Ist $G : [a, b] \to [0, \infty)$ eine Funktion, so gilt:

$$\int_a^b G(t)\, dA(t) = \int_{A(a)}^{A(b)} G(T(s))\, ds.$$

Hinweis: Für (b) betrachte zuerst Funktionen der Form $G(t) = 1_{[c,d)}(t)$ für $a \leq c < d \leq b$.

Zum Termin: 21.05.2014