Übungsblatt 1

1. (a) Seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta > 0$ und $X_1, \dots, X_k$ unabhängige, gammaverteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$.
   Zeige, dass $X := \sum_{i=1}^k X_i$ ebenfalls gammaverteilt ist. Genauer gilt

$$X \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i, \beta\right).$$

   (b) Sei $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_d)$ mit $\sigma > 0$ und $d \in \mathbb{N}$.
   Zeige, dass

$$\|Y\|_2^2 \sim \Gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

   gilt.

   Hinweis zu (b): Zeige die Aussage zuerst für $d = 1$. Die Tatsache $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ könnte dabei hilfreich sein.

2. (a) Sei $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Zeige, für $\gamma \in (-\alpha, \infty)$ und $\rho \in (-\infty, \beta)$ gilt

$$\mathbb{E}[X^\gamma e^{\rho X}] = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma)}{\beta^\gamma \Gamma(\alpha)} \left(1 - \frac{\rho}{\beta}\right)^{-(\alpha+\gamma)} \tag{1}$$

   (b) Sei $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_d)$ mit $\sigma \geq 0$ und $d \in \mathbb{N}$.
   Zeige mit Hilfe von (1):

   (i) Für $p > -d$ gilt

$$\mathbb{E}\big[\|Y\|_2^p\big] = (\sqrt{2\sigma^2})^p \frac{\Gamma\left(\frac{d+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$

   (ii) Für $2\sigma^2\rho < 1$ gilt

$$\mathbb{E}\big[\exp(\rho\|Y\|_2^2)\big] = \frac{1}{(\sqrt{1 - 2\sigma^2\rho})^d}.$$

3. Sei $M = (M_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges, quadratisch-integrierbares Martingal mit $M_0 = 0$.
   Zeige:

   (a) $\mathbb{E}\big[M_t^2\big] = \mathbb{E}\big[[M]_t\big]$ für alle $t \geq 0$.

   (b) Für $M \in \mathcal{M}_2$ gilt $\|M\|_{\mathcal{M}_2} = \mathbb{E}\big[[M]_\infty\big]$

Zum Termin: 11.03.2015