Übungsblatt 2

1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

   (a) Zeige die Identität: $\mathbb{V}_F(I) = \mathbb{V}_F^+(I) + \mathbb{V}_F^-(I)$.

   Habe F zusätzlich lokal endliche Variation.

   (b) Zeige, dass $\mathbb{V}_F^{(\pm)}([a,b]) < \infty$ für alle $a, b \in I$ mit $a < b$.

   (c) Zeige die Jordan-Zerlegung: $F(b) - F(a) = \mathbb{V}_F^+([a,b]) - \mathbb{V}_F^-([a,b])$.

2. Sei M ein stetiges lokales Martingal, N eine lokal beschränkter Prozess und τ eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit. Zeige, falls $M^\tau = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit gilt, dann ist $N^\tau M$ ein stetiges lokales Martingal und es gilt $[N^\tau M] = (N^\tau)^2[M]$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

   Hinweis: Vergleiche mit Lemma 4.28 und dessen Beweis aus den Vorlesungsunterlagen.

3. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und die Stoppzeit $\tau := \inf\{t \geq 0\colon B_t = -1\}$ gegeben. Definiere den Prozess $M = (M_t)_{t\in[0,1]}$ durch

   $$M_t := \begin{cases} 1 + B^\tau_{t/(1-t)} & \text{für } t \in [0,1), \\ 0 & \text{für } t \in [1,\infty). \end{cases}$$

   M ist bzgl. einer entsprechenden Filtration $\mathbb{F}'$ bekanntlich ein stetiges lokales Martingal (falls die Nullmenge $\{\tau = \infty\}$ aus dem Wahrscheinlichkeitsraum entfernt wird).
   Zeige, die quadratische Variation von M erfüllt bis auf Ununterscheidbarkeit

   $$[M]_t = \begin{cases} \tau \wedge \frac{t}{1-t}, & \text{für } t \in [0,1), \\ \tau, & \text{für } t \in [1,\infty). \end{cases}$$

4. Sei X ein stetiges Semimartingal mit kanonischer Darstellung $X = M + A$, wobei M ein stetiges lokales Martingal und A ein stetiger, adaptierter Prozess mit lokal endlicher Variation mit $A_0 = 0$ ist.

   (a) Sei $V \in L(A)$. Zeige

   $$\mathbb{V}_{\int_0^\cdot V_s\,dA_s}([0,t]) = \int_0^t |V_s|\,d\mathbb{V}_A(s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

   (b) Sei $V \in L(X)$. Zeige, dass $\int_0^\cdot V_s\,dX_s$ wieder ein stetiges Semimartingal ist mit kanonischer Darstellung

   $$\int_0^\cdot V_s\,dX_s = \int_0^\cdot V_s\,dM_s + \int_0^\cdot V_s\,dA_s.$$

Zum Termin: 25.03.2015

Hinweis zu (a): Bezeichne $F(t) := \int_0^t V_s\, dA_s$ und überlege dir mit Hilfe von 1(c)für $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
F(t) = \int_0^t V_s\, dA_s = &\Big(\int_0^t V_s^+\, d\mathbb{V}_A^+(s) + \int_0^t V_s^-\, d\mathbb{V}_A^-(s)\Big) &&-\Big(\int_0^t V_s^-\, d\mathbb{V}_A^+(s) + \int_0^t V_s^-\, d\mathbb{V}_A^+(s)\Big) \\
= \quad & \mathbb{V}_F^+([0,t]) && - \quad \mathbb{V}_F^-([0,t])
\end{aligned}
$$

Außerdem bezeichne μ_F und μ_A die (signierten) Maße von F bzw. A. Für die entsprechenden Maße gilt dann, mit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$,

$$
\begin{aligned}
\mu_F(B) = &\Big(\int_B V^+\, d\mathbb{V}_A^+ + \int_B V^-\, d\mathbb{V}_A^-\Big) &&-\Big(\int_B V^-\, d\mathbb{V}_A^+ + \int_B V^-\, d\mathbb{V}_A^+\Big) \\
= \quad & \mathbb{V}_F^+(B) && - \quad \mathbb{V}_F^-(B)
\end{aligned}
$$

Folgere aus der Eindeutigkeit der Hahn-Zerlegung die Aussage, mit der Wahl $B = [0,t]$ und unter Verwendung von 1(a).

5. Seien X und Y stetige Semimartingale. Bezeichne $\mathbb{S}$ den Raum der stetigen Semimartingale beschreibt (wobei ununterscheidbare Prozesse miteinander identifiziert werden).
   (a) Zeige, dass $L(X)$ und $\mathbb{S}$ Vektorräume sind.
   (b) Zeige, dass die Abbildung $\Psi\colon L(X) \to \mathbb{S}, V \mapsto V \cdot X$ linear ist.
   (c) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $V \in L(X) \cap L(Y)$ zeige, dass auch $V \in L(\alpha X + \beta Y)$ ist und bis auf Ununterscheidbarkeit gilt

$$V \cdot (\alpha X + \beta Y) = \alpha(V \cdot X) + \beta(V \cdot Y).$$

Hinweis zu (c): Verwende Lemma 4.61 aus den Vorlesungsunterlagen.

Zum Termin: 25.03.2015