Übungsblatt 3

1. Sei $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $A_0 = 0$ eine Funktion von lokal beschränkter Variation. Zeige:

   (a) Wenn A stetig ist, gilt für $t \geq 0$

   $$A_t^2 = 2\int_{(0,t]} A_s\, dA_s.$$

   (b) Wenn A rechtsstetig ist, gilt für $t \geq 0$

   $$\begin{aligned} A_t^2 &= \int_{(0,t]} A_s\, dA_s + \int_{(0,t]} A_{s-}\, dA_s \\ &= 2\int_{(0,t]} A_s\, dA_s - \sum_{0<s\leq t} (\Delta A_s)^2 \\ &= 2\int_{(0,t]} A_{s-}\, dA_s + \sum_{0<s\leq t} (\Delta A_s)^2 \end{aligned}$$

   wobei $A_{s-} := \lim_{u \nearrow s} A_u$ den linksseitigen Limes und $\Delta A_s := A_s - A_{s-}$ die Sprunghöhe für $s \geq 0$ bezeichnet.

Hinweis: Überzeuge dich, dass der Satz von Fubini auch für signierte (Lebesgue-Stieltjes-)Maße gilt, in diesem Fall für das durch A induzierte signierte Maß μ_A.
Berechne zuerst das Maß von $(\mu_A \otimes \mu_A)((0,t]^2)$. Danach zerlege $(0,t]^2 = O \cup U$ in die disjunkten Bereiche oberhalb $O := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \colon 0 < x \leq y \leq t\}$ und unterhalb $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \colon 0 < y < x \leq t\}$ der Diagonale, und berechne deren Maße separat mit Hilfe des Satzes von Fubini.
Beachte/beweise, dass $\mu_A((0,s)) = A_{s-}$ für $s \geq 0$.

Bemerkung. Sei $\mu_A = \mu_A^+ - \mu_A^-$ die Hahn-Zerlegung von μ_A. Die lokal beschränkte Variation von A spiegelt sich in der σ-Endlichkeit des Totalvarationsmaßes $|\mu_A|$ wider. Wegen $\mu_A^+, \mu_A^- \leq |\mu_A|$ sind auch μ_A^+ und μ_A^- beide σ-endliche (positive) Maße.
Das Produktmaß $\mu_A \otimes \mu_A$ ist dann gegeben durch

$$\mu_A \otimes \mu_A = \Big((\mu_A^+ \otimes \mu_A^+) + (\mu_A^- \otimes \mu_A^-)\Big) - \Big((\mu_A^+ \otimes \mu_A^-) + (\mu_A^- \otimes \mu_A^+)\Big).$$

2. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige, deterministische Funktion. Zeige, dass für jedes $T \geq 0$ das stochastische Integral $\int_0^T h(s)\, dB_s$ normalverteilt ist. Genauer gilt für jedes $T \geq 0$

   $$\int_0^T h(s)\, dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T h(s)^2\, ds\right).$$

Hinweis: Definiere die konstanten Stoppzeiten $t_i^n := \frac{i}{n}T$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0,\dots,n\}$ und damit für jedes $n \in \mathbb{N}$ den einfachen vorhersehbaren Prozess

$$h_n(t) := \sum_{i=1}^n h(t_{i-1}^n) 1_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}(t), \quad t \geq 0.$$

Zeige, dass $(h_n \cdot B)_T$ normalverteilt ist. Verwende die Ito-Isometrie, um zu zeigen, dass $(h_n \cdot B)_T \to (h \cdot B)_T$ für $n \to \infty$ in $L^2(\mathbb{P})$ konvergiert und schließe damit auf die Normalität von $(h \cdot B)_T$.

Zum Termin: 22.04.2015

3. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und $\sigma \in \mathbb{R}^d$. Betrachte die folgenden drei Prozesse

   (a) $M_t = \langle \sigma, B_t \rangle$ für $t \in \mathbb{R}_+$,

   (b) $M_t = \|B_t\|_2^2 - td$ für $t \in \mathbb{R}_+$ (kompensierter d-dimensionaler Besselprozess),

   (c) $M_t = \exp(\langle \sigma, B_t \rangle - \frac{1}{2}\|\sigma\|_2^2 t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$ (geometrische Brownsche Bewegung).

   Finde mit Hilfe der Ito-Formel zu jedem der drei Prozesse einen progressiv-messbaren stochastischen Prozess $U\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \|U_s\|_2^2 \, ds\right] < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+,$$

   sodass (bis auf Ununterscheidbarkeit) gilt

$$M = \mathbb{E}[M_0] + \sum_{i=1}^d \int_0^\cdot U_s^i \, dB_s^i.$$

4. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ mit $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)^\top$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)^\top \in \mathbb{R}^d$.
   Beweise, dass das stetige Semimartingal

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \tfrac{1}{2}\|\sigma\|_2^2)t + \langle \sigma, B_t \rangle), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

   (bis auf Ununterscheidbarkeit) die eindeutige Lösung der folgenden stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$S = S_0 + \int_0^\cdot \mu S_s \, ds + \int_0^\cdot S_s \, d\langle \sigma, B_s \rangle \tag{1}$$

   mit $\mathcal{F}_0$-messbarer Anfangswert S_0, sodass $S_0 \neq 0$ überall gilt, ist.

   Hinweis: Für die Eindeutigkeit nimm an, dass es eine weitere Lösung $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ von (1) gibt. Zeige mit Hilfe der Ito-Formel, dass $f(S, \tilde{S}) = 1$ bis auf Ununterscheidbarkeit, wobei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$.

5. Sei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit $\mathcal{F}_0$-messbarem Anfangswert B_0 und sei τ eine $\mathbb{F}^+$-Stoppzeit, sodass B^τ nur Werte in der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ annimmt.

   (a) Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine harmonische Funktion. Zeige, dass $f(B^\tau)$ ein stetiges lokales Martingal ist.

   (b) Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine subharmonische Funktion. Außerdem seien $f(B^\tau)$ und $\Delta f(B^\tau)$ integrierbare Prozesse. Zeige, dass $f(B^\tau)$ ein Submartingal ist.

   (c) Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine superharmonische Funktion. Außerdem seien $f(B^\tau)$ und $\Delta f(B^\tau)$ integrierbare Prozesse. Zeige, dass $f(B^\tau)$ ein Supermartingal ist.

   Hinweis: Verwende die Ito-Formel.

   Bemerkung. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Eine Funktion $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ heißt harmonisch (subharmonisch, superharmonisch), wenn $\Delta f = 0$ $\quad(\Delta f \geq 0, \quad \Delta f \leq 0)$ gilt. Dabei bezeichnet Δ den Laplace-Operator

$$\Delta f := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Zum Termin: 22.04.2015