Übungsblatt 4

1. (a) Sei $B = B_1 + iB_2$ eine $\mathbb{C}$-wertige Brownsche Bewegung.
   Zeige, dass B^2 ein $\mathbb{C}$-wertiges Martingal ist und daher $[B, B] = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit gilt.

   (b) Folgere mit Hilfe des Satzes über die Existenz und Eigenschaften der Kovariation (Theorem 4.49) für reellwertige stetige lokale Martingale, dass die analogen Aussagen (mit Ausnahme der letzten Eigenschaft) auch für $\mathbb{C}$-wertige stetige lokale Martingale gelten. Dabei ist die Kovariation sogar $\mathbb{C}$-linear (nicht nur $\mathbb{R}$-linear).

2. Sei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Für $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $p > 0$ definiere

$$l_{n,p}(t) = \sum_{k=1}^{2^n} \|B_{kt2^{-n}} - B_{(k-1)t2^{-n}}\|_2^p.$$

   Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} l_{n,p}(t) = \infty$ f.s. für alle $p \in (0, 2)$. Mit der Wahl $p = 1$ folgt, dass die Pfade der Brownschen Bewegung f.s. unendliche Variation haben.

   Hinweis: Berechne $\lim_{n\to\infty} \log \mathbb{E}[exp(-l_{n,p}(t)]$ mit Hilfe der Abschätzungen $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ für $x \geq 0$ und $log(1 + x) \leq x$ für $x \geq -1$.

3. Zeige, dass die Pfade einer eindimensionalen Brownschen Bewegung B f.s. nirgends differenzierbar sind.

   Hinweis: Nimm an, dass für $\omega \in \Omega$ der Pfad $t \mapsto X_t(\omega)$, $t \in \mathbb{R}_+$, an der Stelle $s \in \mathbb{R}_+$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $l \in \mathbb{N}$, sodass $|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq l|t - s|$ für alle t aus einer Umgebung von s. Daher gilt $|B_{(j+1)/n}(\omega) - B_{j/n}(\omega)| \leq 7l/n$ für $i := \lceil ns \rceil$ und $j \in \{i, i+1, i+2\}$ und alle entsprechend großen $n \in \mathbb{N}$. Somit ist ω in der Menge

$$N := \bigcup_{k,l,m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i=nk-k+1}^{nk} \bigcap_{j=i}^{i+2} \{|B_{(j+1)/n}(\omega) - B_{j/n}(\omega)| \leq 7l/n\}$$

   enthalten. Zeige, dass N eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist.

4. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{R}^d$-dimensionale Brownsche Bewegung mit $d \geq 3$, die im Punkt $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ startet, d.h. $B_0 = x$. Für $r > 0$ definiere die Stoppzeit $\tau_r := \{t \geq 0 : \|B_t\|_2 \leq r\}$.
   Zeige die folgenden Punkte:

   (a) $M^{(r)} := \|B^{\tau_r}\|_2^{2-d}$ ist ein beschränktes Martingal.

   (b) $\mathbb{P}[\tau_r < \infty] = (r/\|x\|_2)^{d-2}$ für alle $r \in (0, \|x\|_2]$.

   Hinweis: Für (a) zeige, dass $f(x) = \|x\|_2^{2-d}$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, eine harmonische Funktion ist.
   Für (b) gehe wie in Beispiel 3.81 aus der Vorlesung vor. Definiere die Stoppzeit $\tau_R := \{t \geq 0\colon \|B_t\|_2 \geq R\}$ für alle $R > \|x\|_2$. Verwende den Doobschen Stoppsatz mit der Stoppzeit $\tau_r \wedge \tau_R$ und betrachte $R \to \infty$.

Zum Termin: 06.05.2015

5. Fortsetzung von Beispiel 4. Definiere B auf der Nullmenge $N := \bigcup_{t>0}\{B_t = 0\}$ um, sodass $B_t(\omega) = x$ für alle $t \geq 0$ und $\omega \in N$ gilt. Zeige:

   (a) $M := \|B\|_2^{2-d}$ ist ein lokales Martingal, das bis auf Ununterscheidbarkeit dargestellt werden kann als

$$M = \|x\|_2^{2-d} \exp\left((2-d)\int_0^\cdot \frac{B_s}{\|B_s\|_2^2}\,dB_s - \frac{(2-d)^2}{2}\int_0^\cdot \frac{1}{\|B_s\|_2^2}\,ds\right)$$

   (b) M ist ein Supermartingal.

   (c) $\mathbb{E}[M_t] \to 0$ für $t \to \infty$. Daher ist M kein Martingal.

   (d) $M_\infty := \lim_{t\to\infty} M_t$ existiert f.s. und $M_\infty = 0$ f.s.

   (e) $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[M_t^p] < \infty$ für alle $p \in [0, \frac{d}{d-2})$. Daher ist M uniform integrierbar.

   Hinweis: (a) Ito-Formel.
   (b) Lemma von Fatou für bedingte Erwartungswerte.
   (c) Zeige $\int_{K_r(0)} \|y\|_2^{2-d}\,\lambda_d(y) = S_{d-1}r^2/2 < \infty$, wobei $K_r(0)$ die d-dimensionale Kugel mit Radius $r > 0$ um den Ursprung ist, S_{d-1} das Maß der Oberfläche einer $(d-1)$-dimensionalen Einheitskugel und λ_d das d-dimensionale Lebesgue-Maß. Danach verwende eine obere Abschätzung für die stetige Dichte von B_t.
   (d) Verwende die f.s. Version des Doobschen Konvergenzsatzes (Martingalkonvergenzsatzes) für nichtnegative Supermartingale und schätze $\mathbb{E}[M_\infty]$ mit Hilfe des Lemmas von Fatou ab.
   (e) Zeige, dass außerhalb eines kompakten Bereichs um x die stetige Dichte von B_t gleichmäßig für alle $t > 0$ beschränkt ist. Verwende danach Beispiel 3.51 aus der Vorlesung über gleichmäßige Integrierbarkeit.

Zum Termin: 06.05.2015