Übungsblatt 5

1. Sei $M = (M_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$.
   Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) M ist L^1-konvergent.

   (b) M ist abschließbar.

   (c) M ist gleichmäßig integrierbar.

   In jedem dieser Fälle gilt dabei $\sup_{t\in[0,\infty)} \mathbb{E}[\|M_t\|] < \infty$.

   Hinweis: Verwende eventuell die Resultate aus der Vorlesung.
   Für (a) ⇒ (b) betrachte $\mathbb{E}\big[\|\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_s] - X_s\|\big]$ für $s \in [0,\infty)$ und verwende, dass $X_s = \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ für jedes $t \geq s$.

2. (a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, sodass $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ ist. Bezeichne Z die $\mathcal{F}$-messbare Radon-Nikodým-Dichte, d.h. $d\mathbb{Q} = Z\, d\mathbb{P}$.
   Zeige, dass $\mathbb{P}[Z > 0] = 1$ äquivalent zu $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ ist.

   (b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, sodass $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$ ist. Bezeichne Z_t die entsprechende $\mathcal{F}_t$-messbare Dichte, d.h. $d\mathbb{Q} = Z_t\, d\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_t$. Zusätzlich sei das Martingal Z $\mathbb{P}$-abschließbar mit $Z_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$.
   Zeige, dass $\mathbb{P}[Z_\infty > 0] = 1$ äquivalent zu $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ auf $\mathcal{F}_\infty$ ist.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, sodass $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$ ist. Bezeichne Z_t die entsprechende $\mathcal{F}_t$-messbare Dichte, d.h. $d\mathbb{Q} = Z_t\, d\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_t$. Zusätzlich sei Z strikt positiv.

   (a) Zeige, dass jedes stetige $\mathbb{P}$-Semimartingal auch ein stetiges $\mathbb{Q}$-Semimartingal ist.

   (b) Sei $X = M + A$ die kanonische Darstellung (bzgl. $\mathbb{P}$) des $\mathbb{P}$-Semimartingals X.
   Bestimme die kanonische Darstellung (bzgl. $\mathbb{Q}$) des $\mathbb{Q}$-Semimartingals X.

   Hinweis: Verwende Girsanovs Theorem.

4. Sei M ein stetiges lokales Martingal und $V \in L(M)$. Definiere den stochastischen Prozess X als

$$X_t := \exp\left(\int_0^\cdot V_s\, dM_s - \frac{1}{2}\int_0^\cdot V_s^2\, d[M]_s\right), \quad t \geq 0.$$

   Zeige mit Hilfe der Ito-Formel, dass X die eindeutige Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung ist,

$$X = 1 + \int_0^\cdot V_s X_s\, dM_s, \quad \text{bis auf Ununterscheidbarkeit.}$$

   In Differentialnotation schreibt man die SDE auch als

$$\begin{aligned} dX_t &= V_t X_t\, dM_t, \quad t \geq 0, \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

Zum Termin: 20.05.2015

5. Fortsetzung von Beispiel 4. Zeige:
   (a) X ist ein stetiges lokales Martingal mit $\mathbb{E}[X_t] \leq 1$ für alle $t \geq 0$.
   (b) X ist sogar ein gleichmäßig integrierbares Martingal, falls
   $$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty V_s^2\, d[M]_s\right)\right] < \infty$$
   erfüllt ist.

   Hinweis: Verwende die Novikov-Bedingung.

   Satz (Novikov-Bedingung). Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$, sodass $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}[M]_\infty)] < \infty$ gilt. Dann ist $\mathcal{E}(M)$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal.

Zum Termin: 20.05.2015