Übungsblatt 6

1. Sei B eine eindimensionale Brownsche Bewegung.
Eine Brownsche Bewegung auf der Ellipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ mit $a, b > 0$ sei definiert als der zweidimensionale stochastische Prozess $X := (X_t^1, X_t^2)_{t \geq 0}$, gegeben durch
$$X_t^1 := a \cos B_t, \quad X_t^2 := b \sin B_t, \quad t \geq 0.$$
Zeige, dass $X = (X_t)_{t \geq 0}$ die stochastische Differentialgleichung
$$dX_t = -\frac{1}{2} X_t dt + M X_t dB_t.$$
mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt.
Hinweis: Verwende die Ito-Formel.

2. Sei B eine reellwertige Brownsche Bewegung. Mit Hilfe des Gesetzes vom iterierten Logarithmus
$$\limsup_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = 1 \quad \text{f.s.}$$
zeige das folgende Resultat
$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}} = 1 \quad \text{f.s.}$$
Hinweis: Sei B eine Brownsche Bewegung. Wende das Gesetz des iterierten Logarithmus auf eine Transformation von B an, die ebenfalls eine Brownsche Bewegung ist.
(Siehe Stochastische Analysis 1, Übungsblatt 3 des vorigen Semesters.)

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ eine zweidimensionale Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{P}$. Definiere den stochastischen Prozess
$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T].$$
Finde ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{F}_T$, sodass $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ und sodass
$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\widetilde{B}_t^1 \\ d\widetilde{B}_t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T],$$
wobei
$$\begin{pmatrix} d\widetilde{B}_t^1 \\ d\widetilde{B}_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T].$$
eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}$ ist.
Hinweis: Verwende die Version des Satzes von Girsanov am Ende des Übungsblattes.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{P}$.
Definiere den stochastischen Prozess
$$X_t := B_t + t, \quad t \geq 0.$$

(a) Finde für jedes $T > 0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}_T$ auf $\mathcal{F}_T$, sodass $\mathbb{Q}_T \sim \mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_T$ gilt und $(X_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}_T$ ist.

(b) Zeige, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{F}_\infty$ existiert, sodass

$$\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} = \mathbb{Q}_T, \quad T > 0.$$

(c) Zeige, dass

$$\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) = 1,$$

aber

$$\mathbb{Q}(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) = 0.$$

Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Girsanov?

Hinweis: (a) Verwende die Version des Satzes von Girsanov am Ende des Übungsblattes.
(b) Verwende den Fortsetzungssatz für Maße auf σ-Algebren aus der Maßtheorie.
(c) Verwende das Resultat $\lim_{t\to 0} tB_{1/t} = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für die Wahrscheinlichkeit unter $\mathbb{P}$.

5. Laut der Levy-Charakterisierung der Brownschen Bewegung ist jedes stetige lokale Martingal M mit quadratischer Variation $[M]_t = tI_d$ für alle $t \geq 0$ eine Brownsche Bewegung.
Zeige, dass die Forderung der Stetigkeit notwendig ist. D.h. finde einen unstetigen stochastischen Prozess M, sodass $(M_t)_{t\geq 0}$ und $(M_t^2 - tI_d)_{t\geq 0}$ lokale Martingale sind, aber M keine Brownsche Bewegung ist.

Hinweis: Für $d = 1$ betrachte den kompensierten Poissonprozess $M = (N_t - t)_{t\geq 0}$, wobei $N = (N_t)_{t\geq 0}$ ein Poissonprozess mit Parameter $\lambda = 1$ ist.

Eine Version des Satzes von Girsanov.
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und $V \in L(B)$.
Gelte die Annahme, dass das stochastische Exponential

$$Z_t := \mathcal{E}_t(V \cdot B) = \exp\left(\int_0^t V_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|V_s\|_2^2\,ds\right), \quad t \in [0,T],$$

ein gleichmäßig integrierbares Martingal ist.
Definiere $\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_T 1_A]$ für $A \in \mathbb{F}_T$.
Dann ist $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und der stochastische Prozess

$$\widetilde{B}_t := B_t - \int_0^t V_s\,ds, \quad t \in [0,T],$$

ist eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{Q}$.

Eine Version der Novikov-Bedingung.
Sei $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$, sodass $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}[M]_T)] < \infty$ gilt. Dann ist $(\mathcal{E}_t(M))_{t\in[0,T]}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal.

Zum Termin: 03.06.2015