Übungsblatt 7

1. **Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.**
   Betrachte die eindimensionale SDE
$$\begin{aligned} dX_t &= (b - aX_t)\, dt + \sigma\, dW_t, \quad t \geq 0 \\ X_0 &= x, \end{aligned}$$
   mit den Parametern $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Zeige, dass eine eindeutige Lösung der SDE existiert.
   (b) Finde die Lösung X dieser SDE.
   (c) Bestimme $\mathbb{E}[X_t]$ und $Cov(X_t, X_s)$ für $t \geq 0$.

   Hinweis zu (b): Definiere den stochastischen Prozess $Y_t := e^{at}X_t$, $t \geq 0$, und wende die Ito-Formel darauf an.

2. **Brownsche Brücke.**
   Für gegebenes $a, b \in \mathbb{R}$ betrachte folgende stochastische Differentialgleichung
$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{b - X_t}{1-t}\, dt + dW_t, \quad t \in [0,1), \\ X_0 &= a. \end{aligned} \tag{1}$$
   (a) Zeige, dass
$$X_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s, \quad t \in [0,1),$$
   die eindeutige Lösung von (1) ist.
   (b) Bestimme den fast sicheren Grenzwert $\lim_{t \nearrow 1} X_t$.

   Hinweis zu (b): Wende die Ito-Formel auf den stochastichen Prozess $(\frac{W_t}{1-t})_{t\in[0,1)}$ an und verwende die Regel von L'Hospital.

3. Begründe, warum die folgende SDE eine eindeutige Lösung hat
$$dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right) dt + \sqrt{1+X_t^2}dW_t, \quad X_0 = 0,$$
   und bestimme diese Lösung.

   Hinweis: Mache den Ansatz $X_t = f(t, W_t)$ mit einer Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und verwende die Ito-Formel, um ODEs für f zu erhalten.

Zum Termin: 17.06.2015

4. Betrachte folgende eindimensionale stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$\begin{aligned} dX_t &= f(t, X_t)\, dt + c(t) X_t\, dW_t, \quad t \geq 0, \\ X_0 &= x, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige (deterministische) Funktionen sind. Weiters definiere einen *integrierenden Faktor* F durch

$$F_t = \mathcal{E}_t(-c \cdot W) = \exp\left(-\int_0^t c(s)\, dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t c(s)^2\, ds \right), \quad t \geq 0,$$

und definiere $Y_t := F_t X_t$.

(a) Zeige, dass Y die folgende SDE erfüllt

$$\begin{aligned} dY_t &= F_t f(t, X_t)\, dt, \quad t \geq 0 \\ Y_0 &= x. \end{aligned}$$

(b) Fixiere $\omega \in \Omega$. Zeige, dass die Funktion $t \mapsto Y_t(\omega)$ folgende gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{dY_t(\omega)}{dt} &= F_t(\omega) \cdot f\big(t, F_t(\omega)^{-1} Y_t(\omega)\big), \quad t \geq 0 \\ Y_0(\omega) &= x. \end{aligned} \tag{3}$$

Hier wird $\omega \in \Omega$ als Parameter interpretiert. Erkläre wie man aus einer Lösung von (3) zu einer Lösung von (2) kommt.

5. Verwende die Methode aus Beispiel 4 und löse die folgenden SDEs. Überprüfe vorher, ob die Voraussetzungen aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz erfüllt sind.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in (0, \infty)$.

(a)

$$dX_t = \frac{1}{X_t}\, dt + \alpha X_t\, dW_t, \quad X_0 = x.$$

(b)

$$dX_t = \sqrt{X_t}\, dt + \alpha X_t\, dW_t, \quad X_0 = x.$$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für SDE.
Sei $T > 0$, seien $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ messbare Funktionen, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. *Wachstumsbedingung*

$$\|b(t,x)\|_2 + \|\sigma(t,x)\|_2 \leq C(1 + \|x\|_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T],$$

2. *Lipschitzbedingung (in der zweiten Variable)*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\|_2 + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|_2 \leq D\|x - y\|_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T].$$

Sei $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ und $(W_t)_{t \in [0,T]}$ eine m-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$. Dann existiert eine $\mathbb{P}$-f.s. eindeutige Lösung der SDE

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \quad t \in [0,T], \\ X_0 &= Z \end{aligned}$$

mit stetigen Pfaden.

Zum Termin: 17.06.2015