UE 1

Ue-Leiter: Lukas Fertl (Kontakt: lukas.fertl@chello.at). Für die erste UE am 07.03.2018 sind folgende Beispiele vorzubereiten und zu kreuzen. Für die ganze Übung steht B für eine standard Brownsche Bewegung auf einem filtritem Wahrscheinlichkeitsraum. Weiters beziehen sich die Angaben auf die Version des Skriptes vom 22.02.2018. :

1) Konstruiere ein positives stetiges Martingal $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathbb{E}(\max_{s\in[0,t]} X_s) \to \infty$ für $t \to \infty$.
Hint: Sei $a < 0$ und $b > 0$ beliebig und definiere $X = B^{\tau_a} - a$ (siehe 4.73) und $X^* := \sup_{s\in\mathbb{R}_+} X_s$. Verwende 4.36 um zu zeigen:

$$\mathbb{P}(X^* \geq b - a) = \frac{a}{b-a}$$

Dann benutze 4.26 mit $p = 1$ um $\mathbb{E}(X^*) = \infty$ zu zeigen. Der Satz über monotone Konvergenz liefert dann das gewünschte Ergebnis.

2) Zeige, dass $\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ fast sicher gegen 0 konvergiert.
Hint:$B_t = B_0 + \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor}(B_n - b_{n-1}) + B_t - B_{\lfloor t \rfloor}$. Für die Summe benutzte das starke Gesetz der großen Zahlen. Für den anderen Term benutze 4.45(a), maximal Ungleichung, 2.27 und das erste Lemma von Borell Cantelli.

3) Zeige folgende Aussage: Eine $\mathbb{R}^d$ wertige Zufallsvariable X ist genau dann eine (gaußsche ZV) Normalverteilte Zufallsvariable wenn $\forall v \in \mathbb{R}^d$ (v, X) eine $\mathbb{R}$ wertige Zufallsvariable ist (hier steht $(\cdot,\cdot)$ für das euklidische Skalarprodukt).

4) Seien N, X unabhängige ZV wobei X symmetrisch $\{-1, 1\}$ und $N \in \mathbb{N}$ wertig ist mit $\mathbb{E}(N) = \infty$. definiere:

$$M_t := \frac{1}{N} + NX1_{\{t\geq 1\}}$$

Zeige, dass M ein echtes rechtsstetiges lokales Martingal ist (dh lokales Mg aber kein Martingal) mit integrierbarem Startwert. Weiters zeige, dass auch $M_t - M_0$ kein lokales Martingal bezüglich der natürliche Filtrierung ist.

5) Sei B eine Standard 1 dim Brownsche Bewegung $a \in \mathbb{R}$ und $M_t := e^{aB_t - \frac{ta^2}{2}}$. Zeigen Sie (ohne Ito-formel), dass die quadratische Variation $[M]_t$ (dh der stetig adaptierte Prozess mit finiter Variation sodass $M_t^2 - [M]_t$ ein stetiges lokales Martingal ist) gegeben ist durch:

$$[M]_t = \int_0^t a^2 M_s^2 ds$$

Hint: Fubini für bedingte Erwartungswerte.

6) Sei τ die Trefferzeit von B zum Level -1. Definiere $M_t := 1_{\{t<1\}}(1 + B^\tau_{\frac{t}{1-t}})$ und $\mathcal{F}'_t := \mathcal{F}_{\frac{t}{1-t}}$ für $t < 1$ und $\mathcal{F}'_t = \sigma(\bigcup_{s\in\mathbb{R}_*} \mathcal{F}_s)$ für $t \geq 1$.
Zeige, dass M ein echtes stetiges lokales Martingal bzgl $\mathcal{F}'_t$ ist