Name:

Mat.Nr.:

Studienkennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2008S, 3.0h
29.Jänner 2009
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung auf der Liste!

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. (y_t) sei ein ARMA(1,1) Prozess

$$y_t = a y_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$$

wobei $|a| < 1$, $|b| < 1$ und (ϵ_t) ein weißes Rauschen mit $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 1$ ist.

   (a) Berechnen Sie die (kausale) MA(∞) Darstellung des Prozesses (y_t), d.h. geben Sie eine Darstellung von (y_t) als $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k \epsilon_{t-k}$. (Welche der obigen Annahmen ist wesentlich für die Existenz dieser Darstellung?)

   (b) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(k)$ (als Funktion der Parameter a, b).

   (c) Berechnen Sie die Einschritt Prognose $y_{t+1|t,1}$ (d.h. die Prognose von y_{t+1} aus y_t) und die entsprechende Prognosefehler-Varianz $\sigma_{1,1}^2$.

Hinweis für (a) und (b): Sie können z.B. die MA(∞) Darstellung des AR(1) Prozesses $z_t = a z_{t-1} + \epsilon_t$ und die Identität $y_t = z_t + b z_{t-1}$ verwenden.

2. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer iid Folge von $N(0,1)$-Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 1}$. Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ die entsprechende Irrfahrt, also

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad (n \geq 1)$$

und $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ die von $(S_n)_{n\geq 0}$ erzeugte Filtration.

   (a) Sei $Y_n = \exp(S_n)$. Berechnen Sie $\mathbf{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]$.

   (b) Zeigen oder begründen Sie sorgfältig: Der Prozeß $(L_n)_{n\geq 0}$ ist ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder überhaupt kein Smartingal, wobei

$$L_0 = 0, \quad L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Y_k}{Y_{k-1}} \quad (n \geq 0)$$

   mit $\Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1}$.

   (c) Finden Sie eine möglichst einfache Darstellung für den vorhersehbaren Anteil in der Doob-Zerlegung von (L_n).

   (d) Sei

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}\Delta L_k.$$

   Finden Sie eine möglichst einfache Beziehung zwischen R_n und Y_n.

3. In dieser Aufgabe soll ein Filter zur Schätzung der Trendkomponente einer Zeitreihe entwickelt werden. Betrachten Sie dazu Filter der Form $b(L) = b_{-1}L^{-1} + b_0 + b_1 L$, wobei L wie üblich den Lag-Operator bezeichnet.

   (a) Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten b_{-1}, b_0, b_1 erfüllen, damit der Filter einen linearen Trend nicht verändert? D.h. für alle linearen Trend-Funktionen $m_t = \mu_0 + \mu_1 t$ mit $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ soll $b(L)m_t = b_{-1}m_{t+1} + b_0 m_t + b_1 m_{t-1} = m_t$ gelten.

   (b) Zeigen Sie, dass die Transferfunktion $b(z) = b_{-1}z^{-1} + b_0 z^0 + b_1 z$ des Filter dann für $z = \exp(-i\lambda)$ gegegeben ist durch

$$b(\exp(-i\lambda)) = b_{-1}\exp(i\lambda) + b_0\exp(-i0\lambda) + b_1\exp(-i\lambda) = 1 + 2b_{-1}(\cos(\lambda) - 1)$$

   (c) Wieso ist $b_{-1} = 1/4$ eine „vernünftige" Wahl?

4. (a) Gegeben sei eine standard Brownsche Bewegung $(B(t), t \in \mathbb{R}_+)$. Gibt es Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, sodass $X(t) = aB(ct)$ eine standard Brownsche Bewegung ist (abgesehen vom Trivialfall $a = 1$, $c = 1$)? Wenn ja, geben Sie an welche, wenn nein, geben Sie eine Begründung!

   (b) Gegeben sei ein standard Poisson Prozeß $(N(t), t \in \mathbb{R}_+)$ mit Intensität $\lambda > 0$. Gibt es Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, sodass $Y(t) = aN(ct)$ eine standard Poissonprozeß mit Intensität λ ist (abgesehen vom Trivialfall $a = 1$, $c = 1$)? Wenn ja, geben Sie an welche, wenn nein, geben Sie eine Begründung!

(c) Sei $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$ der kompensierte Poissonprozeß, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $t_k = k/2^n$ für $k \geq 0$. Zeigen bzw. begründen Sie, dass $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{N}(t_{k-1})(\tilde{N}(t_k) - \tilde{N}(t_{k-1}))$$

ein Martingal ist.

(d) Finden Sie möglichste einfache Ausdrücke für den Erwartungswert und die Varianz von V_n.