Name:

Mat.Nr.:

Studienkennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse

Vorlesung, 2008S, 3.0h

12.März 2009

Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung auf der Liste!

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. (ϵ_t) sei weißes Rauschen mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 1$. Betrachten Sie folgende Differenzengleichungen:

   (a) $y_t = y_{t-2}$
   (b) $y_t = y_{t-2} + \epsilon_t$
   (c) $y_t = y_{t-2} + \epsilon_t - \epsilon_{t-2}$
   (d) $y_t = (3/2)y_{t-1} + y_{t-2}$
   (e) $y_t = (3/2)y_{t-1} + y_{t-2} + \epsilon_t$

   Existiert eine stationäre Lösung (y_t)? Ist die stationäre Lösung (wenn sie existiert) eindeutig? Ist die stationäre Lösung (wenn sie existiert und eindeutig ist) kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer iid Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ von $N(0,1)$-Zufallsvariablen. Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ die entsprechende Irrfahrt, also

   $$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad (n \geq 1)$$

   und $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ die von $(S_n)_{n\geq 0}$ erzeugte Filtration.

   (a) Sei $Y_n = \exp(-S_n)$. Berechnen Sie $\mathbf{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]$.
   (b) Zeigen oder begründen Sie sorgfältig: Der Prozeß $(L_n)_{n\geq 0}$ ist ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder überhaupt kein Smartingal, wobei

   $$L_0 = 0, \quad L_n = \sum_{k=1}^{n} S_{k-1}\Delta Y_k \quad (n \geq 0)$$

   mit $\Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1}$.
   (c) Sei

   $$R_0 = 0, \quad R_n = L_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

   Finden Sie eine möglichst einfache Darstellung der Doob-Zerlegung von R.

3. (x_t) und (y_t) seien zwei unkorrelierte stationäre Prozesse mit Erwartungswert 0. Das heißt, $\mathbf{E}x_t = \mathbf{E}y_t = 0$ und $\mathbf{E}x_t y_s = 0$ für alle $t, s \in \mathbb{Z}$. Weiters sei $\gamma_k^x = \mathbf{E}x_{t+k}x_t$ und $\gamma_k^y = \mathbf{E}y_{t+k}y_t$ die ACF von (x_t) bzw. (y_t).

   Wir definieren einen neuen Prozess (z_t) mit

   $$\begin{aligned} z_{2s} &= x_s \\ z_{2s+1} &= y_s \end{aligned}$$

   für $s \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

   (a) (z_t) ist stationär dann und nur dann, wenn $\gamma_k^x = \gamma_k^y$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) Wenn (x_t) und (y_t) MA Prozesse (mit identischer ACF $\gamma_k^x = \gamma_k^y$) sind, dann ist auch (z_t) ein MA Prozess.
   (c) Wenn (x_t) und (y_t) AR Prozesse (mit identischer ACF $\gamma_k^x = \gamma_k^y$) sind, dann ist auch (z_t) ein AR Prozess.

4. Gegeben sei eine reelle Zahl $\lambda > 0$ und ein stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $(X(t), t \in \mathbb{R})$ mit

   $$\mathbf{E}[X(t)] = 0, \quad \mathrm{Cov}[X(s), X(t)] = e^{-\lambda|t-s|}$$

   für alle $t \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$.

   Wir konstruieren für eine beliebige reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ aus diesem Prozess in stetiger Zeit einen Prozess in diskreter Zeit $(w_n, n \in \mathbb{Z})$ durch

   $$w_n = X(n) - aX(n-1) \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Berechnen Sie $\mathbf{E}[w_n]$ und $\mathrm{Cov}[w_n, w_{n+h}]$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $h \in \mathbb{Z}$.
   (b) Zeigen Sie, dass es genau eine Zahl $a \in (0,1)$ gibt, sodass $(w_n) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ und geben Sie σ^2 an.

   Hinweis: Unter Umständen ist es vorteilhaft bei der Rechnung $\beta = e^{-\lambda}$ einzuführen.