Name:

Mat.Nr.:

Studienkennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.078 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2008S, 3.0h
25.Juni 2009
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung auf der Liste!

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. (y_t) sei ein ARMA(1,1) Prozess:
$$y_t = (1/3)y_{t-1} + \epsilon_t - 3\epsilon_{t-1}$$
wobei (ϵ_t) ein weißes Rauschen mit Varianz $E\epsilon_t^2 = 1$ ist.

   Zeigen Sie, dass (y_t) ein weißes Rauschen ist und berechnen Sie die Varianz von y_t.

   Hinweis: Berechnen Sie das Spektrum des Prozesses (y_t). Welche der Standard-Annahmen an einen ARMA Prozess sind hier nicht erfüllt?

2. Es sei $(W(t), t \geq 0)$ eine (standard) Brownsche Bewegung und $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die von ihr erzeugte Filtration. Weiters sei
$$X(t) = W(t)^4 - 3t^2 \quad (t \geq 0).$$
   (a) Berechnen Sie $E[X(t)]$ und $\mathrm{Var}[X(t)]$ für $t \geq 0$.

   (b) Berechnen Sie $E[X(t)|\mathcal{F}(s)]$ für $0 \leq s < t$.

   (c) Ist $(X(t), t \geq 0)$ bezüglich $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder überhaupt kein Smartingal? (Begründung!)

3. (ϵ_t) sei weißes Rauschen mit Varianz $E\epsilon_t^2 = 1$. Weiters sind zwei lineare Filter $a(L) = 1 + a_1 L$ und $b(L) = 1 + b_1 L$ gegegeben. (L ist der Lag-Operator und a_1 und b_1 sind reelle Zahlen.) Zeigen Sie, dass der Prozess
$$y_t = a(L)b(L)\epsilon_t$$
dann und nur dann ein weißes Rauschen ist, wenn $a_1 = b_1 = 0$.

4. (a) Gegeben sei eine reele Zahl $\lambda > 0$ und eine iid Folge $(\eta_n)_{n\geq 1}$ von Zufallsvariablen mit
$$P[\eta_n \leq x] = (1 - e^{-\lambda x})I_{(x>0)}.$$
   Weiters sei
$$\zeta_n = \prod_{k=1}^{n} \eta_k \quad (n \geq 1).$$
   Begründen Sie, dass $P[\max(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) > x]$ mit Hilfe der Maximalungleichungen von Doob bzw. Kolmogorov abgeschätzt werden kann. Wie lautet die entsprechende Abschätzung?

   (b) Es seien $C > 1$ eine reelle Zahl, $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration und $(\xi_n)_{n\geq 0}$ ein dazu adaptierter Prozess, wobei $1 \leq \xi_n \leq C$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine multiplikative Zerlegung der Form
$$\xi_n = \beta_n \theta_n \quad (n \geq 0)$$
   gibt, wobei $\beta_0 = 1$ und $(\beta_n)_{n\geq 1}$ vorhersehbar und $(\theta_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal ist.
   Hinweis: Versuchen Sie β_n mit Hilfe der Martingalbedingung für θ_n auszurechnen.