(7.1) Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebene Formel zur Berechnung der (affinen) Prognose aus der Prognose des mittelwert-bereinigten Prozesses: Beachten Sie, dass die beste affine Prognose von y_{t+h} aus $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-k+1}$ gleich der Projektion von y_{t+h} auf den Unterraum $\mathrm{sp}\{1, y_t, \ldots, y_{t-k+1}\}$ ist, wobei 1 hier eine Zufallsvariable bezeichnet, die nur den Wert $1 \in \mathbb{R}$ annimmt.

Sei $\tilde{y}_t = y_t - \mathbb{E} y_t$ der mittelwertbereinigte Prozess, $y_{t+h|t,k}$ die affine Prognose von y_{t+h} und $\tilde{y}_{t+h|t,k}$ die affine Prognose von $\tilde{y}_t$. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{sp}\{1, y_t, \ldots, y_{t-k+1}\} = \mathrm{sp}\{1, \tilde{y}_t, \ldots, \tilde{y}_{t-k+1}\}$
2. Die Projektion von $\tilde{y}_{t+h}$ auf $\mathrm{sp}\{1, \tilde{y}_t, \ldots, \tilde{y}_{t-k+1}\}$ ist gleich der Projektion von $\tilde{y}_{t+h}$ auf $\mathrm{sp}\{\tilde{y}_t, \ldots, \tilde{y}_{t-k+1}\}$. Das heißt, $\tilde{y}_{t+h|t,k} = 0 + c_{k1}^{(h)} \tilde{y}_t + \cdots + c_{kk}^{(h)} \tilde{y}_{t-k+1}$. (Die beste *affine* Prognose von $\tilde{y}_{t+h}$ ist *linear*.)
3. Die (affine) Prognose von y_{t+h} ist gleich

$$\begin{aligned} y_{t+h|t,k} &= \mathbb{E} y_t + \tilde{y}_{t+h|t,k} \\ &= \mathbb{E} y_t + c_{k1}^{(h)} \tilde{y}_t + \cdots + c_{kk}^{(h)} \tilde{y}_{t-k+1} \\ &= (1 - c_{k1}^{(h)} - \cdots - c_{kk}^{(h)}) \mathbb{E} y_t + c_{k1}^{(h)} y_t + \cdots + c_{kk}^{(h)} y_{t-k+1} \end{aligned}$$

(7.2) Sei y_t ein stationärer Prozess mit $\mathbb{E} y_t = 0$. Beweisen Sie folgende Behauptungen (Notation wie in der Vorlesung):

1. $\det(\Gamma_k) = 0$ dann und nur dann, wenn die Zufallsvariablen $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-k+1}$ linear abhangig in $\mathbb{L}_2$ sind.
2. $\sigma_{h,k}^2 = 0$ ist äquivalent zu $y_{t+h} \in \mathrm{sp}\{y_t, \ldots, y_{t-k+1}\}$
3. Aus $\sigma_{h,k}^2 = 0$ folgt $\det(\Gamma_{k+h}) = 0$.
4. Aus $\sigma_{h,k}^2 = 0$ folgt $\sigma_{1,k+h-1}^2 = 0$.
5. Aus $\sigma_{1,k}^2 = 0$ folgt $\sigma_{h,k}^2 = 0$ für alle $h > 0$.

(7.3) Zeigen Sie, dass der Yule-Walker Schätzer für das AR(1) Modell $y_t = a y_{t-1} + \varepsilon_t$ gleich $\hat{a} = \hat{\gamma}(1)/\hat{\gamma}(0)$ ist.

Zeigen Sie, dass dieses geschätzte Modell immer die Stabilitätsbedingung erfüllt, d.h. $(1 - \hat{a}z) \neq 0, \forall |z| \leq 1$.

(7.4) Betrachten Sie folgende “ARMA(1,1) Prozesse”:

$$\begin{aligned} y_t &= 0.5 y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.1 \varepsilon_{t-1} \\ y_t &= 0.5 y_{t-1} + \varepsilon_t - 2 \varepsilon_{t-1} \\ y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.1 \varepsilon_{t-1} \\ y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

und beantworten Sie folgende Fragen:

1. Existiert eine stationäre Lösung?
2. Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?
3. Falls eine eindeutige stationäre Lösung existiert, dann skizzieren Sie die spektrale Dichte von (y_t).
4. Welche der Standardannahmen an ARMA sind erfüllt, bzw. nicht erfüllt?