(5.1) Betrachten Sie den AR(4)-Prozess: $y_t = ay_{t-4} + \varepsilon_t$, $|a| < 1$. Berechnen Sie die stationäre Lösung. (Hinweis: verwenden Sie die Formel für die geometrische Reihe für $(1-az^4)^{-1}$.) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion und machen Sie eine Skizze der Autokorrelationsfuktion für $a = 0.75$. (Interpretation?)

(5.2) Sei (y_t) die stationäre Lösung der Gleichung

$$y_t = ay_{t-1} + \varepsilon_t$$

wobei $|a| \neq 1$ und $(\varepsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ ein weisses Rauschen ist. ((y_t) ist also ein AR(1) Prozess.)

Zeigen Sie, dass der Prozess (η_t), der definiert ist durch

$$\eta_t = y_t - a^{-1}y_{t-1}$$

ein weisses Rauschen mit Erwartungswert 0 und Varianz $a^{-2}\sigma^2$ ist. Hinweis: Berechnen Sie $\mathbb{E}\,\eta_t$, $\mathbb{E}\,\eta_t^2$ und $\mathbb{E}\,\eta_{t+k}\eta_t$ aus dem Erwartungswert von y_t und der Autokovarianzfunktion von (y_t).

(y_t) erfüllt daher auch die Differenzengleichung:

$$y_t = a^{-1}y_{t-1} + \eta_t$$

für das weisse Rauschen $(\eta_t) \sim \mathrm{WN}(a^{-2}\sigma^2)$.

(5.3) Fortsetzung: Zeigen Sie, dass der Amplitudengang des Filters

$$h(L) = (1 - a^{-1}L)(1 - aL)^{-1}$$

konstant ist: $|h(\exp(-i\lambda))|^2 = c$. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $|h(z)|^2 = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Beachten Sie dabei, dass $\overline{z} = z^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.)

Wieso folgt aus dieser Beobachtung sofort, dass der oben definierte Prozess (η_t) ein white noise Prozess ist? Geben Sie auch die Varianz von η_t an.

(5.4) Sei (ε_t) ein white noise Prozess: $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$.

Der Prozess (x_t), $t \in \mathbb{N}_0$, $x_t = \mu_t + \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k$ ist ein sogenanter "random walk mit Drift".

1. Zeigen Sie, dass der random walk mit Drift die Differenzengleichung

$$x_t = x_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, \quad t \geq 1$$

erfüllt.

2. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}\,x_t$ und die Auto-Kovarianzfunktion $\gamma(t,s) = \mathbb{C}(x_t, x_s)$; $t \geq 0$. Ist (x_t) stationär?