

(12.1) Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung, $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ die von ihr erzeugte Filtration, und seien $0 \leq t_1 < t_2$ fest vorgegebene Zahlen. Berechnen Sie $E[W(t_1)W(t_2)|\mathcal{F}(t)]$. Unterscheiden Sie dabei die drei Fälle $0 \leq t \leq t_1, t_1 < t \leq t_2, t > t_2$. (Prüfung März 20011)

(12.2) Zeigen Sie (mit der Notation aus Buch bzw. Vorlesung)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n W|^2 = T \quad \text{in } L^2,$$

d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n W|^2 - T \right]^2 \right) = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Unabhängigkeit der Inkremente um den Erwartungswert zu vereinfachen. Was sind die Erwartungswerte von $\Delta_i^n W, |\Delta_i^n W|^2$ und $|\Delta_i^n W|^4$? [B&Z, Ex.6.29]

(12.3) Sei $(B(t), 0 \leq t \leq 1)$ ein Prozess mit $B(t) = W(1-t) - W(1)$ mit W eine Brownsche Bewegung. Beschreiben Sie seine endlichdimensionalen Verteilungen. (Prüfung November 2008)

(12.4) Sei $Z \sim N(0, 1)$ und $C(t) = \sqrt{t}Z$ für $t \geq 0$.

1. Berechnen Sie $E[C(t)]$ und $E[C(t)^2]$.
2. Ist $(C(t), t \geq 0)$ ein Gaußscher Prozess? (Begründung!)
3. Ist $(C(t), t \geq 0)$ eine Brownsche Bewegung? (Begründung!).

(12.5) Simulieren Sie (näherungsweise) einige Pfade einer Brownschen Bewegung auf dem Intervall $0 \leq t \leq 1$. Konkret:

- Wählen Sie eine natürliche Zahl $n \geq 5$ und definieren Sie das Gitter

$$t_i^n = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

- Welche Verteilung hat der Zufallsvektor $(W(t_1), \dots, W(t_n))$?
- Simulieren Sie einen Zufallsvektor nach dieser Verteilung. Hinweis: Das die Inkremente der Brownschen Bewegung unabhängig sind, ist es leicht, diese zu simulieren.
- Interpolieren Sie linear, um so eine Näherung eines Brownschen Pfades zu erhalten. Plotten Sie diese. (Ab $n = 200$ erhält man brauchbare, mit $n = 2000$ schöne Bilder!)

Als Studierende der Mathematik an einer technischen Universität geht man davon aus, dass sie mit einem Computer und einfacher mathematischer und statistischer Software umgehen können. Sie können ihr Lieblingssystem benutzen, müssen aber die Vorgangsweise bzw. verwendeten Befehle erklären können. Schicken ihren Code rechtzeitig vor der Übung an fhubalek@fam.tuwien.ac.at. Vergessen Sie nicht Ihren Name und welche System Sie benutzen anzugeben.

Sie können aber diese Aufgabe auch ohne Computer unter Benutzung der iid $N(0,1)$ -Realisierungen aus dem Buch

RAND Corporation, A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates, Free Press Publishers, Glencoe, Illinois, 1955 (Neu aufgelegt 2001), daraus Seite 1 anbei, download siehe unten,¹

lösen und die Pfade selbst zeichnen. Versuchen Sie dann, Ihre Werte einigermaßen sauber auf die Tafel zu bringen.

¹www.rand.org/content/dam/rand/pubs/monograph_reports/2005/deviates.txt.zip