(8.1) Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine iid Folge von $N(0,1)$-Zufallsvariablen und $(S_n)_{n\geq 0}$ ihre Partialsummenfolge. Berechnen Sie $\mathrm{E}[S_n]$, $\mathrm{Var}[S_n]$ und $\mathrm{Cov}[S_n, S_m]$ für $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

(8.2) (Fortsetzung) Sei $(Z_t, t \in \mathbb{R}_+)$ eine Einbettung von $(S_n)_{n\geq 0}$ in stetige Zeit. Berechnen Sie $\mathrm{E}[Z_t]$, $\mathrm{Var}[Z_t]$ und $\mathrm{Cov}[Z_u, Z_t]$ für $t, u \in \mathbb{R}_+$

1. bei stückweise konstanter Einbettung,
2. bei linearer Interpolation.

Hinweis: Schreiben Sie $t = n + \alpha$, $u = m + \beta$ mit $n, m \in \mathbb{Z}_+$ und $\alpha, \beta \in [0,1)$.

(8.3) Gegeben seien zwei reelle Zahlen $\theta > 0$ und $\sigma > 0$ sowie zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen A und B mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Wir definieren durch

$$X(t) = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t), \quad t \in \mathbb{R}$$

einen stochastischen Prozess[1] in stetiger Zeit $(X(t), t \in \mathbb{R})$.

1. Berechnen Sie $\mathrm{E}[X(t)]$ und $\mathrm{Var}[X(t)]$.
2. Skizzieren Sie einige typische Pfade des Prozesses.[2]

(8.4) (Fortsetzung) Ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit, $(X(t), t \in \mathbb{R})$ heisst (schwach) stationär, wenn es ein $\mu \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

- $\mathrm{E}[X(t)^2] < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{E}[X(t)] = \mu \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{Cov}[X(t+h), X(t)] = \gamma(h) \quad \forall t, h \in \mathbb{R}$.

1. Berechnen Sie $\mathrm{Cov}[X(s), X(t)]$ für den Prozess aus dem vorigen Beispiel und zeigen Sie, dass der Prozess stationär ist. Hinweis: Additionstheorem des Kosinus.
2. Geben sie ein Beispiel für einen stochastischen Prozess in stetiger Zeit $(X(t), t \in \mathbb{R})$, der nicht stationär ist, für den aber der in diskreter Zeit beobachtete Prozess $(X(t), t \in \mathbb{Z})$ stationär ist.[3]

[1] Manchmal bevorzugen wir die Schreibweise $(X(t), t \in \mathbb{R})$ statt $(X_t, t \in \mathbb{R})$.
[2] Diese Aufgabe wird interessanter, wenn Sie die Pfade am Computer simulieren.
[3] Ganz leicht!

(8.5) Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und eine Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ von unabhängigen exponentialverteilten[4] Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[T_n] = 1/n$. Für alle Borelmengen $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ definieren wir $X_A(\omega)$ als Anzahl der $T_n(\omega)$, die in A liegen,

$$X_A(\omega) = \#\{n \geq 1 : T_n(\omega) \in A\}.$$

1. Finden Sie einen geeigneten Zustandsraum $(S, \mathscr{S})$, sodass $(X_A, A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ein stochastischer Prozess wird.[5]
2. Zeigen Sie: Für $a > 0$ gilt $X_{[a,\infty)} < \infty$ f.s.

[4] Wiederholen oder recherchieren Sie, wenn nötig, die Exponentialverteilung!
[5] Zusatzfrage: Begründen Sie, wieseo X_A eine Zufallsvariable, d.h. $\mathscr{F}$-messbar ist.