(2.1) Gegeben ist eine (reelle) Zeitreihe $(y_t | t = 1, \ldots, T)$. Die diskrete Fouriertransformation (der Mittelwert-zentrierten) Zeitreihe ist definiert durch

$$Y_k = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y}) \exp(-i\frac{2\pi k}{T}t), \;\; k = 0, \ldots, (T-1)$$

Zeigen Sie: $Y_0 = 0$ und $Y_{T-k} = \overline{Y_k}$.

In den folgenden Beispielen bezeichnet DFT immer die diskrete Fouriertransformation der Mittelwert-zentrierten Zeitreihe.

(2.2) Beweisen Sie, dass die Zeitreihe mit der inversen DFT (iDFT) aus der DFT rekonstruiert werden kann, d.h.,

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} Y_k \exp(i\frac{2\pi k}{T}t) = y_t - \bar{y}.$$

Verwenden Sie die folgende Identität

$$\sum_{k=0}^{T-1} \exp(i\frac{2\pi k}{T}t) \exp(-i\frac{2\pi k}{T}s) = \begin{cases} T, & \text{für } t - s = qT, \, q \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

(2.3) Gegeben sind zwei (relle) Zeitreihen $(y_t | t = 1, \ldots, T)$, $(x_t | t = 1, \ldots, T)$ und deren DFT's $(Y_k | k = 0, \ldots T-1)$ und $(X_k | k = 0, \ldots, T-1)$. Beweisen Sie die Identität von Parseval:

$$\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \overline{Y_k} X_k.$$

(2.4) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion und Autokorrelationsfunktion für die folgenden MA Prozesse ((ε_t) ist ein weisses Rauschen mit $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \sigma^2$):

(a) $y_t = a\varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$,

(b) $y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \ldots + \varepsilon_{t-10}$,

Zeigen Sie, dass $|\rho(1)| \leq 0.5$ für alle MA(1) Prozesse gilt.